

В.Н. Рудницкий, доктор технических наук, профессор кафедры системного программирования
Черкасский государственный технологический университет, Черкассы (Украина)

С.В. Пивнева, кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики и математического моделирования
Тольяттинский государственный университет, Тольятти (Россия)

С.В. Бурмистров, аспирант кафедры информатики и информационной безопасности
Черкасский государственный технологический университет, Черкассы (Украина)

Ключевые слова: ортогональная форма представления булевых функций; минимизация систем частично и полностью определенных систем булевых функций; распараллеливание процесса минимизации систем частично или полностью определенных булевых функций с большим числом переменных.

Аннотация: В статье обоснован путь ускорения минимизации частично или полностью определенных систем булевых функций, заданных в ортогональной форме представления, за счет параллельного выполнения поиска минимальной формы одновременно несколькими кластерными вычислительными системами методом параллельной декомпозиции булевой функции.

Минимизация систем частично или полностью определенных булевых функций (БФ), содержащих большое число аргументов, является актуальной задачей при создании комбинационных схем (КС) цифровых блоков (ЦБ). Перспектива реализации любой функциональной зависимости на основе минимизации систем БФ на аппаратном уровне в виде двух-, трех- или четырехкаскадной схемы логических элементов (см. рис. 1) с прогнозируемым минимальным временем реализации указанного функционального действия является ключевой задачей, к которой сводится целый ряд технических задач создания цифровых электронных устройств.

С увеличением числа аргументов в БФ стандартные методы непосредственной минимизации в функционально полных базисах оказались малоприменимыми из-за их низкой эффективности. Поэтому для минимизации БФ с большим числом аргументов авторами за основу была взята ортогональная форма представления

(ОРФП) [1] как многовариантное обобщение нескольких форм представления БФ – общеизвестной классической формы представления (КФП) и полиномиальной формы представления Рида-Мюллера (РМФП). ОРФП построена как эволюционное продолжение реализации декомпозиций Шеннона и Рида с перенасыщенным базисом логических элементов. Как логические элементы базиса в ОРФП использует не конкретные БФ, а целые множества БФ, объединенные по определенным признакам – группы релятивности (ГР) [2].

С точки зрения минимизации БФ в ОРФП результат может быть получен не в одной форме, а в нескольких реализациях (см. рис. 1). Это дает возможность разработчику право выбора оптимальной реализации готового изделия по определенной априорной характеристике – или получения максимальной скорости быстрогодействия или минимальных характеристик сложности реализации цифровой схемы [1].

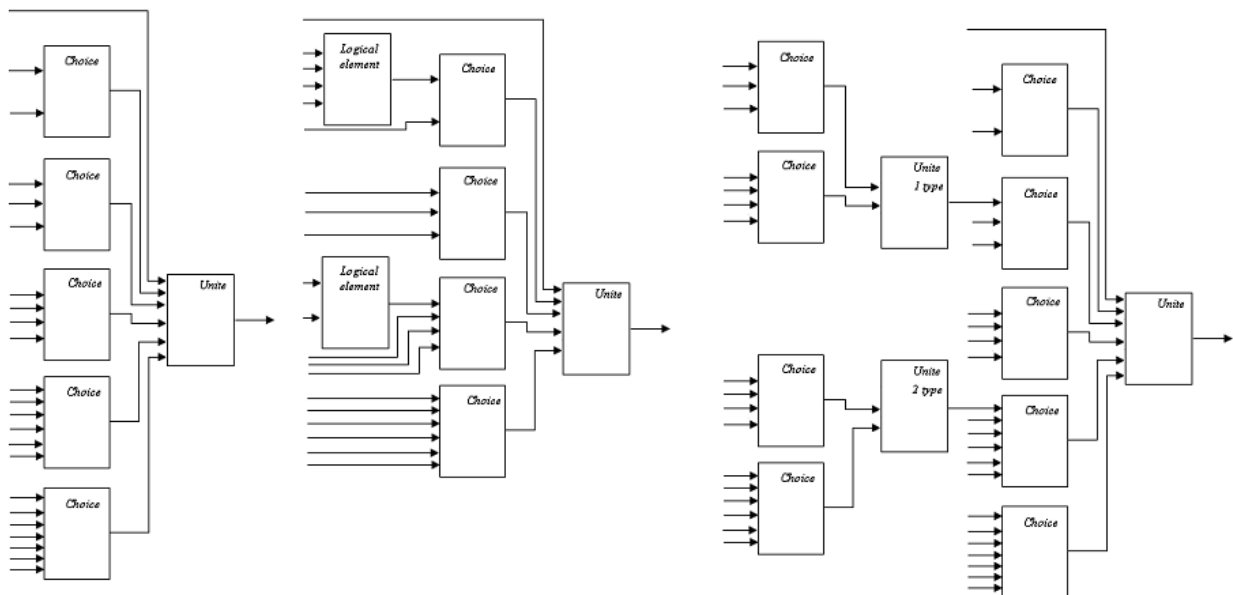


Рис. 1. Двух-, трех- или четырехкаскадные схемы логических элементов как результат минимизации в ортогональной форме представления булевых функций

Основным структурным компонентом реализации минимизированных БФ в ОРФП в виде КС является двухуровневая схема или ее частный случай – одноуровневая схема. Первый уровень состоит из выбирающих логических элементов (логический элемент SNOISE – см. рис. 1) – коммутативных БФ множества ГР № 1, булевых функций, которые имеют в бинарном векторе только одну единицу – один положительный результат из всех возможных вариантов. Второй уровень может состоять с одного логического объединяющего элемента (логический элемент UNITE – см. рис. 1):

- или с коммутативных БФ множества ГР № 1, булевых функций, которые имеют в бинарном векторе только один ноль – один отрицательный результат из всех возможных вариантов;
- или с коммутативных БФ множества МГР [3] булевых функций, которые имеют в бинарном векторе одинаковое количество нулей и единиц – одинаковое количество отрицательных и положительных результатов из всех возможных вариантов.

В основу минимизации БФ в ОРФП положена параллельная декомпозиция БФ [4]. На основе параллельной декомпозиции разработаны для ОРФП машинные методы:

- для минимизации полностью определенных (ПО) булевых функций [4];
- для доопределения и минимизации частично определенных (ЧО) булевых функций [5];
- для минимизации систем полностью определенных булевых функций [6];
- для доопределения и минимизации систем частично определенных булевых функций [6]

Одинаковая последовательность минимизации методов [4, 5, 6] дает возможность объединить методы в один и создать на основе параллельной декомпозиции универсальный машинный метод для минимизации полностью или частично определенных БФ или систем БФ. Данный метод с успехом применим к минимизации БФ с большим числом переменных.

Основной проблемой всех методов минимизации является достаточно большая протяженность процесса минимизации БФ с большим числом аргументов во времени. Данная проблема объясняется тем, что по своему внутреннему строению булева функция является фрактальной структурой. Легко показать на основании декомпозиции Шеннона, что БФ от n аргументов является результатом взаимной композиции n пар БФ, содержащих $n-1$ аргумент. Любую БФ от n аргументов можно разложить в ряд, который содержит 2 БФ от $n-1$ аргумента (1):

$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= \\
 &= x_i \wedge f_{0i}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \vee \\
 &\vee x_i \wedge f_{1i}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)
 \end{aligned}
 \quad (1)$$

Другими словами, булева функция f содержит внутри аналогичные БФ f_{0i} и f_{1i} (себе подобные), но с меньшим числом аргументов. Фрактальная структура БФ определяет способы ее минимизации. Научкой хорошо исследованы методы и способы обработки фрактальных структур. Это или рекурсивные процедуры или методы пере-

бора. Как следствие, задача минимизации булевых функций, вследствие особенностей ее структуры, сводится к оптимизации процесса перебора путем использования других вещественных свойств полного множества БФ – заменой простого перебора направленным, и, как следствие, ускорения процесса минимизации.

Большая протяженность процесса минимизации объединенного метода во времени вызвана сразу несколькими параметрами:

– размером расширенной ТИ БФ [4]. Расширенная ТИ БФ является основным объектом, над которым выполняются действия при минимизации БФ при определении значения информационных частей членов ряда БФ в ОРФП. Количество строк в таблице истинности равно 2^n , где n – количество аргументов БФ. Даже при небольших значениях n таблица является значительной по размерам (см. табл. 1) и занимает значительные объемы памяти компьютера;

– ростом количества базисных частей Φ_i членов ряда БФ с увеличением значения базисного коэффициента K [6]. При $K=1$ БФ насчитывает $2 \cdot n$ вариантов базисных частей Φ_i . С увеличением значения базисного коэффициента на единицу до значения $K \leq \frac{n}{2}$ количество

базисных частей существенно увеличивается. Так при $n=24$ рост количества базисных частей Φ_i составляет (см. табл. 2).

Таблица 1. Зависимость роста числа строк таблицы истинности булевой функции от числа аргументов

№ пп	Количество аргументов в булевой функции	Количество строк в таблице истинности
1	5	32
2	16	65 536
3	24	16 777 216
4	32	4 294 967 296
5	64	1,84467*10 ¹⁹

Таблица 2. Зависимость роста количества базисных частей Φ_i булевой функции, которая содержит 24 аргумента, от значения базисного коэффициента K

№ пп	Значение K	Количество Φ_K	Прирост $\Delta = \frac{\sum \Phi_K}{\sum \Phi_{K-1}}$
1	1	48	-
2	2	1104	23
3	3	16192	14,66667
4	4	170016	10,5
5	5	1360128	8
6	6	8614144	6,333333

Существенное увеличение размеров расширенной ТИ БФ и количества базисных частей Φ_i членов ряда БФ значительно увеличивает протяженность процесса минимизации БФ во времени.

Для оптимизации процесса целиком предлагается уменьшить суммарное время минимизации систем БФ за счет параллельного выполнения поиска базисных

частей Φ_i , у которых соответствующие информационные части БФ $Q_i = 1$ или $Q_i = 0$ одновременно несколькими вычислительными системами. Алгоритм работы аппаратно-программного комплекса для мини-

мизации систем частично или полностью определенных булевых функций с большим числом переменных имеет вид (см. рис. 2).

Данный алгоритм состоит из следующих этапов:

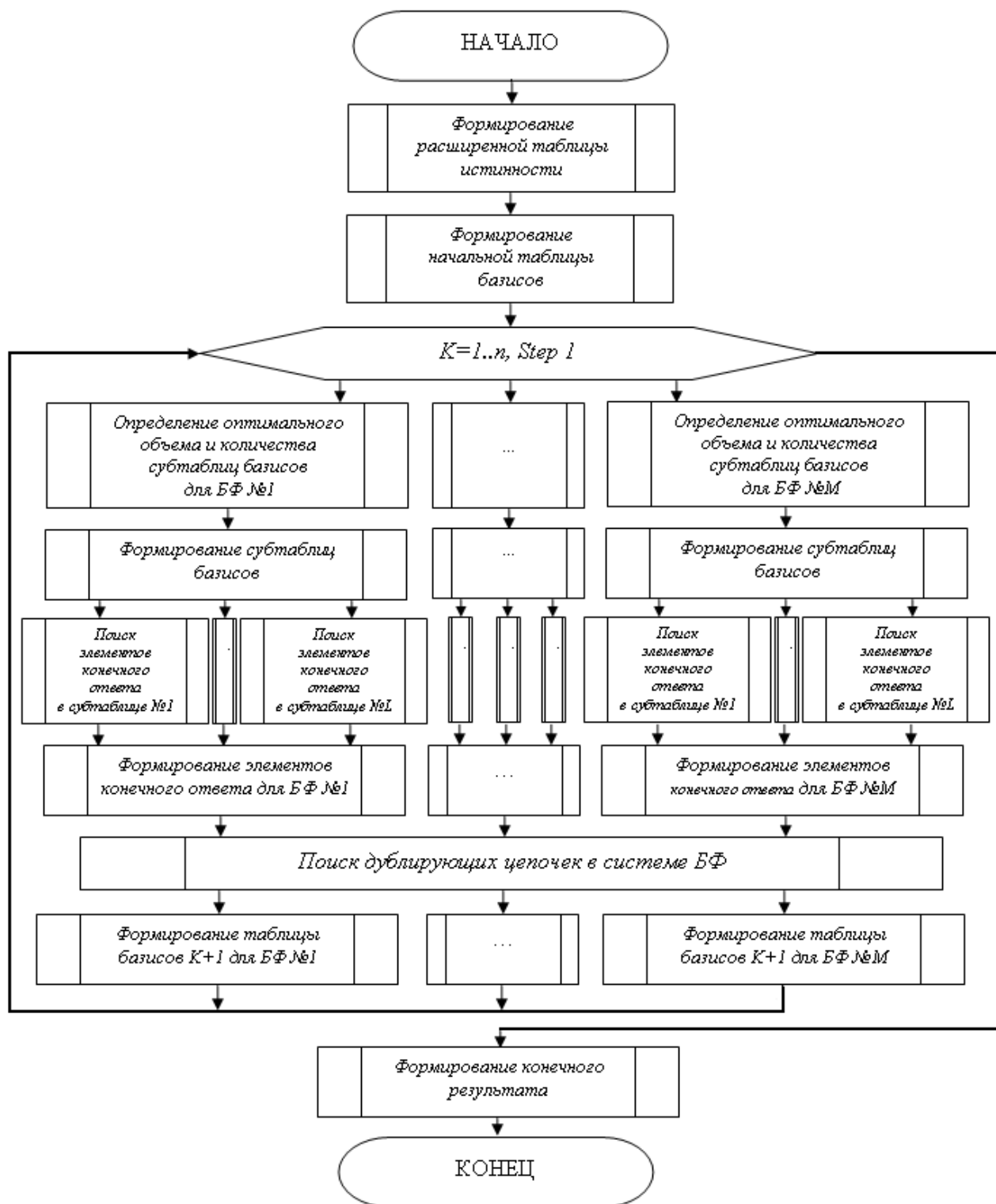


Рис. 2. Блок-схема работы аппаратно-программного комплекса для минимизации систем частично или полностью определенных булевых функций с большим числом переменных

1. Формирование расширенной таблицы истинности. Данная таблица включает в себя столбцы аргументов, инверсий аргументов, столбцы результатов. Размер таблицы $(2^n + 1) \times (2 \cdot n + m)$, где n – количество аргументов, m – количество БФ.

2. Формирование начальной таблицы базисов. Начальная таблица базисов включает в себя (при $K=1$) полное множество – перечень аргументов и их инверсий. Таблица базисов при $K=2$ – полное множество – перечень попарных взаимноортогональных конъюнкций, состоящих из аргументов или их инверсий, при $K=3$ – полное множество строенных взаимноортогональных конъюнкций, и т.д. Начальная таблица базисов в первый момент для всех БФ одинакова, но в процессе минимизации все последующие таблицы базисов формируются отдельно для каждой БФ.

3. Для каждой БФ разбить таблицу базисов на определенное число частей – субтаблиц базисов. Для этого определить оптимальный объем субтаблицы базисов. Под оптимальным объемом субтаблицы нужно понимать такой объем, при котором минимизация субтаблицы происходит за приемлемый период времени.

4. В каждой субтаблице найти такие элементы – базисные части Φ_i БФ, для которых соответствующие им информационные части Q_i равны или единице или нулю.

5. Все базисные части Φ_i разных субтаблиц, для которых $Q_i=1$, записать в перечень элементов конечного результата.

6. Для разных БФ определить общие дублирующие цепочки.

7. В конце каждого этапа, в случае частично определенных БФ, – доопределить БФ.

8. Создать новую таблицу базисов для следующего значения базисного коэффициента, вычеркнув в ней все невзаимноортогональные с ответами элементы.

9. По окончании минимизации сформировать конечный результат.

В качестве вывода можно отметить, что распараллеливание процесса минимизации систем частично или полностью определенных булевых функций с большим числом переменных существенно ускоряет поиск ре-

зультата за счет использования ресурсов кластерных или других многопроцессорных систем

Работа частично поддержана ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (соглашение № 14.В37.21.1934)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кочкарев Ю.А., Панаско Е.Н., Синько И.В. Возможности реализации логических функций в ортогональной форме представления // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – № 1. – 2011. – С. 45-49.
2. Кочкарьов Ю.О., Бурмістров С.В., Синько І.В. Спрощення логічного проектування блоків цифрових схем на основі каталогізації груп релятивності (ГР). / Ю.О. Кочкарьов, С.В. Бурмістров, І.В. Синько. Вісник ЧДТУ. – 2011, № 4 – с. 39–41.
3. Кочкарьов Ю.О., Бурмістров С.В., Синько І.В. Спрощення логічного синтезу цифрових блоків на основі каталогів логічних функцій / «Радиоэлектроника и информатика» Харківського національного університету радіоелектроніки, – 2012, № 2 – с. 67–69.
4. Melnikov B.F., Melnikova A.A. Some properties of the basis finite automation / Korean Journal of Computational and Applied Mathematics. 2002. Т. 9. № 1. С. 135–150.
5. Ю.А. Кочкарев, С.В. Бурмистров, С.Ф. Аксенов. Минимизация частично определенных булевых функций в ортогональной форме представления / «Прикладная радиоэлектроника», 2013, Том 12, № 3 – С. 413–420.
6. Ю.А. Кочкарев, В.Н. Рудницкий, С.В. Бурмистров. Минимизация систем полностью определенных булевых функций в ортогональной форме представления / Эвристические алгоритмы и распределенные вычисления в прикладных задачах. (Выпуск 2) Коллективная монография. Под редакцией профессора Б.Ф.Мельникова. Ульяновск 2013 – с. 141–152.

PARALLELIZING THE MINIMIZE THE SYSTEMS PARTIALLY OR FULLY DEFINED BOOLEAN FUNCTIONS WITH MORE VARIABLES

© 2014

V.N. Rudnicki, doctor of technical sciences, professor of systems programming
Cherkasy State Technological University, Cherkassy (Ukraine)

S.V. Pivneva, the candidate of pedagogical sciences
Togliatti State University, Tolyatti (Russia)

S.V. Burmistrov, a graduate student of computer science and information security
Cherkasy State Technological University, Cherkassy (Ukraine)

Keywords: orthogonal form of representation of boolean functions; minimization systems partially and fully determined systems of boolean functions; parallelizing the minimization systems partially or fully defined boolean functions with a large number of variables.

Annotation: In the article the way to speed up the minimization of some or all of certain systems of boolean functions defined in the orthogonal form of the representation by the parallel execution of the search form at the same time the minimum multiple computer systems using parallel decomposition of boolean functions.