

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА С ВОЗДЕЙСТВИЯМИ
НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ПУЛЬСАЦИЙ ДАВЛЕНИЯ**

© 2014

В.Н. Ковальцов, доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой «Теплоэнергетика»

Ю.А. Хахалев, аспирант

Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск (Россия)

Ключевые слова: пограничный слой; пульсации давления; турбулентный поток; модель; фрактальная размерность; численное исследование.

Аннотация: В настоящее время широко применяется математическое моделирование для расчета характеристик турбулентных потоков. Математическая задача турбулентного течения с интенсивными воздействиями является не замкнутой. Замыкается она с помощью моделей турбулентности. На сегодняшний момент известно достаточно большое количество моделей турбулентности. Как правило, они имеют ограниченную область применения, особенно если рассматривается поток с воздействиями. В этой связи было бы удобно получить модель с универсальными характеристиками воздействий. Авторы предлагают использовать фрактальную размерность пульсаций давления турбулентного потока как характеристику, не связанную с физическими, геометрическими или иными параметрами воздействий и не зависящую от их природы. Для определения фрактальной размерности пульсаций давления турбулентного потока были предприняты экспериментальные исследования турбулентных пульсаций давления. Экспериментально полученные ряды пульсаций давления подвергались анализу. С помощью R/S метода определялась фрактальная размерность пульсаций давления невозмущенного турбулентного потока и турбулентного потока с различной степенью воздействия на пристенную турбулентность. Полученные результаты свидетельствуют о том, что фрактальная размерность для различных случаев отличается между собой. Наименьшая фрактальная размерность пульсаций давления соответствует случаю оптимального воздействия на пристенную турбулентность, когда сопротивление трения потока было наименьшим. Далее фрактальная размерность увязывалась с экспериментальными данными по сопротивлению трения и профилям скорости, и на основе обобщения была получена зависимость коэффициента интенсивности турбулентного обмена в пограничном слое от фрактальной размерности пульсаций давления потока. Эта зависимость вводилась в модель пути смешения Прандтля. На основе предложенной модели была создана программа и проведено численное исследование сопротивления трения и структуры турбулентного потока. Погрешность расчета отличается от экспериментальных значений по сопротивлению трения на 2,5 %.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время широко используются средства вычислительной гидрогазодинамики для моделирования турбулентных потоков. Несомненно, это мощный инструмент исследования, при этом обычно предлагается на выбор несколько моделей турбулентности.

Следует отметить, что для некоторых задач достаточно трудно, даже невозможно применять подобные пакеты программ, например, при большой разнице в масштабах элементов объекта. Для корректировки таких моментов можно дополнять программу встроенными модулями, написанными на внутреннем языке. Однако даже в этом случае программа зачастую остается «черным ящиком» и отследить каждый нюанс затруднительно.

Можно сказать, что работа по оптимизации и модернизации некоторых моделей турбулентности, а также по созданию новых моделей ведется постоянно. Особенно это касается нестандартных задач, когда на поток накладываемое внешнее воздействие. Природа воздействий разнообразна, из чего следует «узкая специализация» некоторых моделей, настроенных на конкретные условия [1]. Между тем желательно получить более универсальную модель, не зависящую от природы воздействия.

Временные ряды турбулентных пульсаций давления можно подвергнуть фрактальному анализу, который поможет определить фрактальную размерность, являющуюся важнейшей характеристикой, позволяющей определять многие свойства пульсаций, например,

«эффекта памяти», что важно для прогнозирования поведения потока [2].

Также возможно проанализировать связь фрактальной размерности с другими характеристиками турбулентных потоков, такими как сопротивление трения, теплоотдача, коэффициент интенсивности турбулентного переноса. Кроме того, фрактальная размерность пульсаций турбулентного потока является более универсальной характеристикой по сравнению с конкретными параметрами возмущающих воздействий, которые вводятся в математические модели турбулентных потоков [3].

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ И МЕТОДИКА
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ**

Было проведено экспериментальное исследование рядов турбулентных пульсаций давления в пограничном слое турбулентного потока в перфорированной трубе с демпфирующими полостями и определена их фрактальная размерность [3; 4].

Параметры реальной динамической системы возможно определить по экспериментальному временному ряду и предложенному виду системы дифференциальных уравнений (СДУ). При этом характеристики «восстановленного» аттрактора можно сравнить с характеристиками «исходного» аттрактора для доказательства адекватности предложенной модели. В простейшем случае модельные параметры входят линейно в СДУ [5; 6].

Для определения размерности временных рядов пульсаций давления можно воспользоваться так называемым RS-анализом [2; 5; 6], представляющим собой

совокупность статистических приемов и методов анализа временных рядов, которые позволяют определить такие важные их характеристики, как показатель Херста, наличие неперiodических циклов, памяти и т. п.

Методика определения фрактальной размерности следующая. Если имеется временной ряд

$$S = (S_t)_{t \geq 0},$$

то из него можно образовать последовательность вида:

$$S = h = (h_t)_{t \geq 1},$$

где $h_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$ – логарифмическое отклонение в момент времени. Тогда для каждого натурального числа n можно составить величины

$$H_n = \sum_{k=1}^n h_k,$$

позволяющие вычислить некоторые числовые характеристики получившейся подпоследовательности.

Пусть $\bar{h}_n = \frac{H_n}{n}$ – среднее арифметическое элементов подпоследовательности

$$h = (h_i)_{i=1}^n.$$

Размах R определяется как

$$R_n = \max_{k=1, \dots, n} \left(\sum_{i=1}^k (h_i - \bar{h}_n) \right) - \min_{k=1, \dots, n} \left(\sum_{i=1}^k (h_i - \bar{h}_n) \right).$$

Среднеквадратичное отклонение составит

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (h_i - \bar{h}_n)^2.$$

Нормированный размах отклонений определяется из соотношения

$$RS_n = \frac{R_n}{S_n}.$$

Вычисляя в соответствии с вышеприведенным алгоритмом значения RS_n , образуем из них и соответствующих значений количества элементов n последовательности точек на плоскости $(x_n, y_n) \equiv (\ln n, \ln RS_n)$. Далее применяется метод наименьших квадратов (МНК) для определения углового коэффициента прямой, проходящей максимально близко к полученным точкам.

Полагая

$$c_1 = \sum_{i=1}^N x^2, \quad c_2 = \sum_{i=1}^N x, \quad g_1 = \sum_{i=1}^N xy, \quad g_2 = \sum_{i=1}^N y,$$

находим показатель Херста

$$H = \frac{Ng_1 - c_2g_2}{Nc_1 - c_2^2}.$$

По известному коэффициенту Херста H [5] временного ряда можно элементарно определить фрактальную размерность (размерность Минковского) Dim временного ряда по формуле:

$$Dim = 2 - H.$$

Далее под фрактальной размерностью временного ряда будет подразумеваться именно эта размерность, определенная именно таким способом.

Коэффициент Херста $H > 0,5$ соответствует фрактальному броуновскому движению с положительной корреляцией (долгой памятью), $H = 0,5$ – обычному белому гауссовскому шуму, $H < 0,5$ соответствует антиперсистентным или эргодическим рядам, поведение которых характеризуется высокой изменчивостью и возвратом к «среднему».

Используя выше рассмотренную методику, была определена фрактальная размерность турбулентного потока воздуха в гладкой трубе и в трубе с демпфирующими полостями. Анализировались различные временные отрезки, на которых происходило изменение фрактальных характеристик и определялись средние значения фрактальной размерности Dim [3; 4].

Эксперименты показали (рис. 1), что фрактальные размерности пульсаций давления турбулентных потоков при различном количестве перфорационных отверстий, сообщающихся с демпфирующими полостями, существенно отличаются.

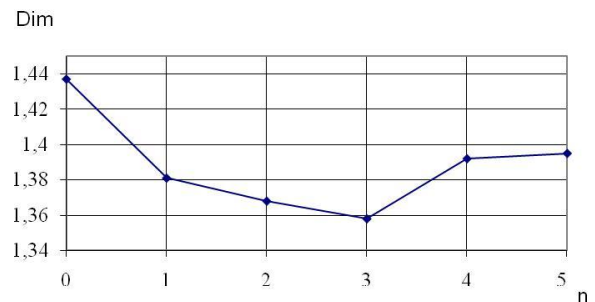


Рис. 1. Зависимость среднего значения фрактальной размерности турбулентного потока Dim от количества перфорационных отверстий $n=0-5$, сообщающихся с каждой демпфирующей полостью

Полученные результаты выявляют немонотонную зависимость среднего значения фрактальной размерности турбулентного потока от количества перфорационных отверстий, сообщающихся с каждой демпфирующей полостью [4]. Наблюдается качественное совпадение представленной зависимости с полученной ранее зависимостью сопротивления трения от количества перфорационных отверстий [7]. Представляется неслучайный характер такого совпадения. Наилучший результат получен при фрактальной размерности, наиболее

отличной от значения фрактальной размерности невозмущенного потока, соответствующей $n=0$.

Зависимость относительного сопротивления трения, представляющего собой отношение коэффициента трения в трубе с демпфирующими полостями к коэффициенту трения в гладкой трубе C_f/C_{f0} , от размерности потока представлена на рис. 2. Как следует из графика на рис. 2, зависимость относительного сопротивления трения C_f/C_{f0} от размерности потока Dim носит возрастающий характер.

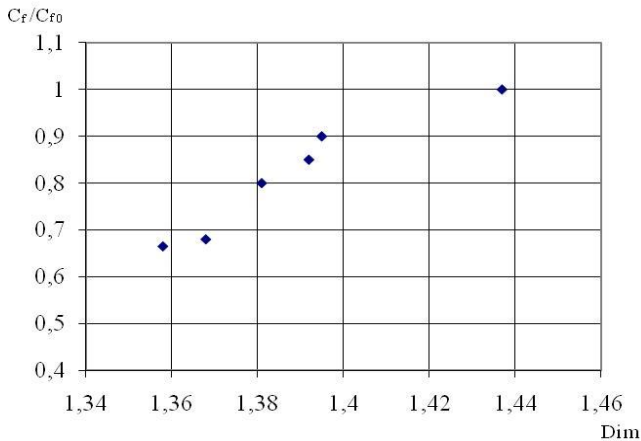


Рис. 2. Зависимость относительного сопротивления трения от размерности потока

ОБОБЩЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАВИСИМОСТИ СОПРОТИВЛЕНИЯ ТРЕНИЯ ОТ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ПОПЕРЕЧНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ ДАВЛЕНИЯ НА ОСНОВНОМ УЧАСТКЕ ПЕРФОРИРОВАННОЙ ТРУБЫ С ДЕМПФИРУЮЩИМИ ПОЛОСТЯМИ

Возможно предположить линейный характер зависимости относительного сопротивления трения от размерности потока $C_f/C_{f0} = f(Dim)$. Однако ожидается, что отношение коэффициента трения в трубе с демпфирующими полостями к коэффициенту трения в гладкой трубе C_f/C_{f0} не может быть больше 1, что имеет место при развитом турбулентном движении потока.

С другой стороны ожидается, что фрактальная размерность пульсаций Dim при развитом турбулентном движении потока (гладкая труба) может быть равной 1,5 (но не превышать это значение теоретически), что соответствует широкополосному спектру колебаний.

Эти теоретические предположения позволяют обобщить зависимость, представленную на рисунке 3 в виде:

$$C_f/C_{f0} = 0,4765 \cdot \tanh(19,29 \cdot Dim - 25,957) + 0,5235, \quad (1)$$

где C_f/C_{f0} – относительный коэффициент сопротивления трения; Dim – фрактальная размерность поперечных пульсаций давления потока.

Эмпирические коэффициенты в зависимости (1) определялись методом наименьших квадратов. Экспериментальные точки группируются около зависимости (1) со среднеквадратичной погрешностью, не превышающей 2,5 % (рисунок 3).

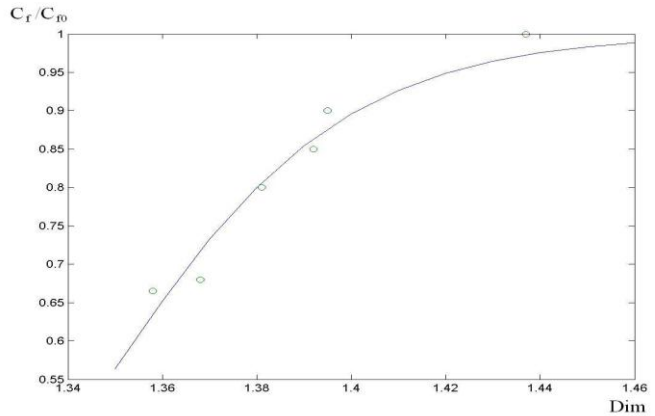


Рис. 3. Результаты обобщения опытных данных в виде зависимости сопротивления трения на основном участке перфорированной трубы с демпфирующими полостями от размерности поперечных пульсаций давления: \circ – экспериментальные значения; линия – расчет по формуле (1)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА

Осесимметричное движение турбулентного потока в трубе (как на начальном, так и на основном участке) можно описать дифференциальными уравнениями пограничного слоя и неразрывности

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho_{\infty} u_{\infty} \frac{du_{\infty}}{dx} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left[r(\mu + \mu_T) \frac{\partial u}{\partial y} \right]; \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(\rho v r)}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

где u, v – продольная (вдоль осевой координаты x) и поперечная (вдоль координаты y) составляющие скорости потока соответственно; r – радиус анализируемой точки; ρ, μ – плотность и динамический коэффициент вязкости потока; μ_T – коэффициент турбулентного переноса количества движения; индекс ∞ характеризует параметры на оси трубы.

Граничные условия:

$$\begin{aligned} x = 0 : u &= u_0; \\ y = 0 : u &= 0; v = 0; \\ y = R_1 : u &= u_{\infty}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь R_1 – радиус проточной части трубы; индекс $_0$ характеризует параметры на входе в трубу.

Скорость u_∞ в каждом сечении трубы определяется соотношением:

$$u_\infty = \frac{u_0(\rho_0/\rho_\infty)}{1 - 2\delta^*/R}, \quad (5)$$

где толщина вытеснения δ^* выражается формулой

$$\delta^* = \int_0^R \left(1 - \frac{y}{r}\right) \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_\infty u_\infty}\right) dy. \quad (6)$$

При анализе изотермического течения можно принять $\rho_0 = \rho_\infty = \rho$.

Коэффициент турбулентного переноса количества движения μ_T в соответствии с моделью пути смешения Прандтля выразим зависимостью

$$\mu_T = \rho l^2 \partial u / \partial y, \quad (7)$$

где длина пути смешения l может быть рассчитана по выражению

$$l = \alpha y \{1 - \exp[-\rho v_* y / (26\mu)]\}, \quad (8)$$

Здесь v_* – динамическая скорость в рассматриваемой точке;

α – коэффициент, характеризующий интенсивность турбулентного переноса количества движения.

В рамках классической модели пути смешения Прандтля коэффициент α считается величиной постоянной ($\alpha = \alpha = 0,4$). Однако в потоках с воздействиями, как показано в [8], этот коэффициент может претерпевать значительные изменения.

На значение коэффициента α в пограничном слое перфорированной трубы с демпфирующими полостями будет оказывать влияние ускорение потока на ее начальном участке, которое можно учесть поправкой, предложенной в работе [8], а также демпфирующие полости, способствующие дополнительному гашению турбулентных пульсаций. В соответствии с подходом [8] на основании экспериментальной зависимости (1) была установлена форма связи коэффициента α с фрактальной размерностью турбулентных пульсаций давления потока воздуха в перфорированной трубе с демпфирующими полостями Dim в виде:

$$\alpha/\alpha_0 = A \cdot \tanh(C \cdot Dim + D) + B, \quad (9)$$

где A, B, C, D – эмпирические коэффициенты замыкания: $A=0,5$; $C=19,864$; $D=-26,709$; $B=0,5$.

Эмпирические коэффициенты определялись путем увязки результатов расчета численным методом с экспериментальными данными методом наименьших квадратов.

МЕТОДИКА И РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ, ОСНОВАННОЙ НА ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ПУЛЬСАЦИЙ ДАВЛЕНИЯ ПОТОКА

Сущность численных методов состоит в том, что они позволяют заменить дифференциальные уравнения алгебраическими. Такая замена становится возможной при наложении на область изменения переменных величин сетки, и, таким образом, все производные, входящие в дифференциальные уравнения и в условия однозначности (2–7), заменяются алгебраическими зависимостями в узлах сетки. В данной работе использовался метод конечных разностей. Замыкание системы осуществляется с помощью модели турбулентности (9).

Применена неявная шеститочечная разностная схема 2-го порядка аппроксимации по пространственным координатам x, y и 1-го порядка – по времени τ [8]. Сходимость разностных схем зависит от правильной аппроксимации дифференциальных уравнений разностными и устойчивости разностных схем. Так как выбрана неявная схема, то она в любом случае будет устойчива.

На рис. 4 представлены результаты численного исследования сопротивления трения турбулентного потока с использованием модели турбулентности, основанной на фрактальной размерности пульсаций давления.

Зависимость на рис. 4 показывает, что расчет по модели удовлетворительно соответствует экспериментально полученным значениям относительного коэффициента сопротивления трения. Максимальная погрешность модели составила 2,5 %, то есть не превышает погрешности эксперимента в 3,5 % при доверительной вероятности 0,95.

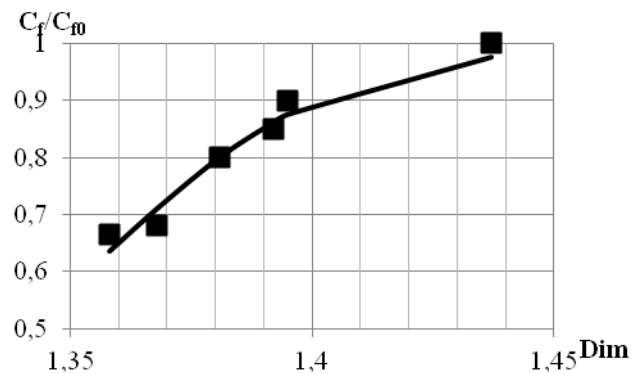


Рис. 4. Результаты численного исследования сопротивления трения турбулентного потока: ■ – экспериментальные значения; линия – результаты численного исследования

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе экспериментального исследования установлена зависимость фрактальной размерности пульсаций давления турбулентного потока от степени внешнего воздействия на поток и предложена математическая модель турбулентности с использованием фрактальной размерности пульсаций давления потока.

Модель реализована в программе для численного исследования турбулентного потока. С помощью программы проведено численное исследование турбулентного потока с воздействием. Результаты численного исследования удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными, погрешность не превышает 5 %.

Статья публикуется при поддержке гранта Президента РФ по проекту № МД-1576.2014.8.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белов И.А., Исаев С.А. Моделирование турбулентных течений : учебное пособие. СПб.: Балтийский гос. техн. ун-т, 2001. 108 с.
2. Валева С.Г., Кувайскова Ю.Е., Губайдуллина С.А. Применение мультифрактального анализа при описании временных рядов в технике и экономике // Вестник УлГТУ. 2008. № 2. С. 23–27.
3. Метод согласования структуры перфорированной поверхности с демпфирующими полостями с турбулентным потоком, основанный на теории хаоса / Л.В. Хахалева [и др.] // Вестник УлГТУ. 2011. № 3. С. 29–31.
4. Ковальногов В.Н., Хахалев Ю.А. Математическое моделирование турбулентного потока с воздействиями на основе анализа фрактальной размерности пульсаций давления // Автоматизация процессов управления. 2013. № 1. С. 47–54.
5. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Постмаркет, 2000. 352 с.
6. Махортых С.А., Сычев В.В. Алгоритм вычисления размерности стохастического аттрактора и его применение к анализу электрофизиологических данных / Abstracts: Nonlinear Phenomena in Biology. Pushchino, 1998. P. 33–34.
7. Ковальногов Н.Н., Хахалева Л.В. Течение и сопротивление трения турбулентного потока в перфорированной трубе с демпфирующими полостями // Известия вузов. Авиационная техника. 2002. № 3. С. 19–22.
8. Ковальногов Н.Н. Пограничный слой в потоках с интенсивными воздействиями. Ульяновск: УлГТУ, 1996. 246 с.

NUMERICAL INVESTIGATION OF EFFECTED TURBULENT FLOW ON THE BASE OF PRESSURE FLUCTUATIONS FRACTAL DIMENSION ANALYSIS

© 2014

V.N. Kovalnogov, Doctor of Engineering, Professor, Head of the Department «Heat Power Engineering»

Y.A. Khakhalev, postgraduate student

Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk (Russia)

Keywords: boundary layer; pressure fluctuations; turbulent flow; model; fractal dimension; numerical investigation.

Annotation: Today, mathematical modeling is widely used for calculation of turbulent flows characteristics. The mathematical problem of turbulent flow with intensive effects is nonclosed. It is being closed with the help of turbulence models. At present we know a lot of turbulence models. As a rule, they have limited application areas, especially when we speak about the flow with impact. In this regard, it would be convenient to get a model with universal effects characteristics. The authors suggest to use fractal dimension of pressure fluctuations of the turbulent flow as a characteristic not related to physical, geometrical or other effects parameters, and not depending on their nature. Experimental research of turbulent pressure fluctuations was undertaken in order to determine the fractal dimension of turbulent flow pressure fluctuations. The experimental series of pressure fluctuations were analyzed. Pressure fluctuations fractal dimension of undisturbed turbulent flow and turbulent flow with various degrees of effect on the wall-adjacent turbulence was determined with the R/S method. The results show that the fractal dimension is different for different cases. The smallest pressure fluctuations fractal dimension corresponds to optimal effect on wall-adjacent turbulence, when the flow friction resistance was minimal. Further, the fractal dimension was correlated with the experimental data on friction resistance and velocity profiles, and on the basis of generalization the dependence of intensity of turbulent exchange in the boundary layer on the flow pressure fluctuations fractal dimension was obtained. This dependence was loaded into the mixing length model of Prandtl. On the base of suggested model the program was created and a numerical investigation of friction resistance and structure of turbulent flow has been conducted. Calculation error on friction resistance differs from the experimental values by 2,5 %.