УДК 004.82
doi: 10.18323/2073-5073-2015-3-328-335

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД К СИСТЕМНОМУ ПРЕДСТАВЛЕНИЮ ЗНАНИЙ В ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ ОБУЧЕНИЯ И КОНТРОЛЯ

Н.А. Сердюкова, доктор экономических наук, доцент, профессор кафедры «Финансы и цены»
Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова, г. Москва
В.И. Сердюков, доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, г. Москва
Л.В. Глухова, доктор экономических наук, профессор, профессор кафедры «Менеджмент организации»
Волжский университет имени В.Н. Татищева, г. Тольятти

Ключевые слова: теория систем; системный подход; алгебраические системы; автоматизированная система оценки результатов; управление контролем знаний; формализация системного подхода.

Аннотация: Интеллектуализация знаний является одним из компонентов современного экономического развития страны и основной задачей образовательной системы в целом. Суть ожидаемых результатов отражена в положительной динамике объемов новых знаний и создании высокотехнологичной окружающей образовательной среды, где риски низкого качества результатов обучения минимальны. Этот аспект способствует развитию новых инструментов управления образовательными системами в их прикладной интерпретации. Одним из важных моментов интеллектуализации знаний является возможность применения экспертных систем для оценки качества обучения. Это является малоизученным и недостаточно широко интерпретируемым направлением прикладных исследований. В статье авторы рассматривают новые идеи проектирования и разработки интеллектуальных автоматизированных систем обучения и контроля, в которых возможна практическая реализация новых образовательных технологий и средств педагогических коммуникаций, например, технологии E-learning.

На основе новой формализации теории систем, базирующейся на использовании алгебраических методов, в работе сформулированы и обоснованы принципы совершенствования экспертных систем в обучении. На базе этого рассмотрены требования к интеллектуальной автоматизированной системе оценки результатов контроля знаний. Рассматриваемые в статье новые методы являются дальнейшим развитием выводов известных ученых в области теории алгебраических систем А.И. Мальцева, в области теории групп А.Г. Куроша и теории сервантных вложений, рассматриваемых ранее Ю.Л. Ершовым. Предлагается алгоритм составления базы знаний и математическая модель экзамена, которая может классифицироваться по форматам размерностей 1D, 2D, 3D… nD.

Целью научной работы является ознакомление широкой аудитории с новой методикой обучения и контроля формируемых знаний на базе аппарата экспертных технологий и алгебраических методов, позволяющих рассматривать качественные характеристики изученного материала.

ВВЕДЕНИЕ

На основе новой формализации теории систем, базирующейся на использовании алгебраических систем, введенной в [1], в статье предлагаются новые принципы и подходы к совершенствованию экспертных систем в обучении и возможные пути их реализации. На этой основе сформулированы и обоснованы требования к интеллектуальной автоматизированной системе обучения и контроля знаний.

Разработана математическая модель экзамена, которая классифицирована по форматам размерности системы знаний 1D, 2D, 3D… nD, отражающим качественные характеристики изученного материала, такие как глубина освоенного материала, широта его охвата и др. Все сформулированные теоремы принадлежат авторам статьи, точные доказательства опираются на [2–11], в данной статье приведены схемы доказательств основных результатов.

Основным инструментом настоящей статьи является алгебраическая формализация понятия системы, применяемая к системе обучения знаниям конкретной дисциплины, и поэтому остановимся вначале на принципах обучения как основных положениях, определяющих формы, методологию и методики процесса обучения. Основополагающими классическими принципами обучения являются принципы: развивающего и воспитывающего обучения; научности; систематичности и последовательности; связи обучения с практикой; доступности; наглядности; сознательности и активности; прочности.

Современные тенденции развития общества требуют совершенствования педагогических принципов обучения и дополнения их принципами: соответствия современному уровню науки и практики; математизации и информатизации образования; оптимизации индивидуализации и стандартизации образования; оптимизации сочетания методов аудиторного образования и E-learning; глобализации образования; эффективности образования.

Обоснованием введения предлагаемых принципов и создания модели интеллектуальной автоматизированной системы обучения и контроля знаний служат полученные в настоящей статье результаты с помощью новой формализации системного подхода на основе методов современной алгебры. С ее помощью получены содержательные результаты в области экспертных систем в общей теории обучения, подтверждающие необходимость введения вышеперечисленных принципов обучения.

ИСТОРИЯ ВОПРОСА ФОРМАЛИЗАЦИИ СИСТЕМНОГО ПОДХОДА

Сложность автоматизированного контроля знаний заключается в первую очередь в отсутствии четкой формализации системы контролируемых знаний, позволяющей получать содержательные результаты в области теории обучения, использующей современные технологии, и в частности, технологии E-learning. Приведем общепринятое интуитивное определение системы, используемое в уже известных попытках формализации понятия системы. Система – это минимальный набор элементов, связанных определенной структурой, придающей этому набору элементов определенные качества, обеспечивающие достижение цели. Отсюда возникает задача формализации теории систем для получения содержательных результатов. Первая работа в этом направлении – книга М. Месаровича и Я. Такахары [4; 5], где с позиции возможности универсальной формализации рассматриваются узловые вопросы теории систем: необходимые и достаточные условия управляемости многомерных систем; проблема минимальной реализации закономерностей, связывающих входные воздействия на систему с выходными параметрами; необходимые и достаточные условия устойчивости по Ляпунову для динамических систем; теорема Геделя о неполноте; проблема декомпозиции; проблема классификации систем, основанная на теории категорий.

В работе [3] дается следующее определение системы S. Пусть задано семейство множеств $\overline{V} = \{V_i \mid i \in I\}$, где I – множество индексов. Тогда системой S, заданной на $\overline{V}$, называется собственное подмножество S декартова произведения $\coprod_{i\in I} V_i$:

$$S \subseteq \coprod_{i\in I} V_i .$$

Все компоненты $V_i \mid i \in I$ декартова произведения $\coprod_{i\in I} V_i$ называют объектами системы S. При этом М. Месарович и Я. Такахара [4; 5] рассматривают в основном системы с двумя объектами – входным объектом X и выходным объектом Y:

$$S \subseteq X \times Y ,$$

причем формализуют систему в терминах ее свойств или, иначе, в терминах взаимосвязей между свойствами рассматриваемой системы. Это хорошо согласуется с сутью системных исследований, направленных на выяснение организации системы и взаимосвязей в ней. Однако бинарные отношения на абстрактных множествах изучены все еще недостаточно хорошо, для того чтобы с помощью общих теорем теории бинарных отношений можно было бы получать содержательные теоремы общей теории систем.

Считаем, что в наибольшей степени отразить суть и получить новые глубокие результаты в области теории систем можно с помощью теории алгебраических систем А.И. Мальцева [6]. Отметим, что еще А.Г. Курош считал, что невозможно ограничить теорию групп вопросами ее использования только лишь в ближайших к ней областях [7]. Полагаем, что это высказывание распространяется не только на математические области, но и на научные исследования в целом.

В работе [8] на базе изучения работ Ю.Л. Ершова был предложен способ выделения и изучения сервантных, или чистых, вложений в специальном классе алгебраических систем – группах, который позволил перенести и обобщить известные результаты теории сервантностей абелевых групп на случай произвольных неабелевых групп (сервантности по предикатам). В работе [9] был разработан способ моделирования конечных состояний системы и определения числа конечных состояний с помощью техники теории групп.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В данной статье сервантные, или чистые, вложения (аналог сервантностей по предикатам) по смыслу, вкладываемому в это понятие, означают вложения, которые не искажают внутренние связи системы, удовлетворяющие условию (предикату) P (not distort domestic relations of a system). Они используются для разграничения связей в системах по их характеру, т. е. для классификации связей в общих системах. При формализации системы важным становится вопрос изменения свойств и состояния системы под влиянием взаимодействия факторов, влияющих на нее, поэтому предлагается следующее определение алгебры факторов общей системы.

Определение 1. Под алгеброй факторов общей системы будем понимать алгебру $\overline{A} = \left\langle A \mid \{ f_\alpha^{n_\alpha} \mid \alpha \in \Gamma\} \right\rangle$ с основным множеством факторов A и множеством операций $\{ f_\alpha^{n_\alpha} \mid \alpha \in \Gamma\}$, описывающих взаимодействие факторов, где:

n_α – арность операции;

Γ – множество символов.

Действия операций $\{ f_\alpha^{n_\alpha} \mid \alpha \in \Gamma\}$ на множестве A показывают качественные изменения системы под действием влияющих на нее факторов.

Определение 2. Подалгебра $\overline{B} = \left\langle B \mid \{ f_\alpha^{n_\alpha} \mid \alpha \in \Gamma\} \right\rangle$ алгебры $\overline{A} = \left\langle A \mid \{ f_\alpha^{n_\alpha} \mid \alpha \in \Gamma\} \right\rangle$ называется P – сервантной подалгеброй алгебры $\overline{A}$, если любой гомоморфизм $\overline{B} \xrightarrow{\alpha} \overline{C}$ подалгебры $\overline{B}$ алгебры $\overline{A}$ в алгебру $\overline{C}$ сигнатуры $\{ f_\alpha^{n_\alpha} \mid \alpha \in \Gamma\}$, удовлетворяющую предикату P, устойчивому относительно взятия подалгебр и фактор-алгебр, продолжается до гомоморфизма алгебры $\overline{A} = \left\langle A \mid \{ f_\alpha^{n_\alpha} \mid \alpha \in \Gamma\} \right\rangle$ в алгебру $\overline{C} = \left\langle C \mid \{ f_\alpha^{n_\alpha} \mid \alpha \in \Gamma\} \right\rangle$, т. е. диаграмма (1) коммутативна:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \overline{B} = \left\langle B \mid \{ f_\alpha^{n_\alpha} \mid \alpha \in \Gamma\} \right\rangle \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \overline{A} = \left\langle A \mid \{ f_\alpha^{n_\alpha} \mid \alpha \in \Gamma\} \right\rangle \arrow[d, dashed, "\beta"] \\ & & \overline{C} = \left\langle C \mid \{ f_\alpha^{n_\alpha} \mid \alpha \in \Gamma\} \right\rangle, \end{tikzcd} \tag{1}$$

т. е. выполняется равенство $\beta\varphi=\alpha$, где φ – вложение $\overline{B} = \left\langle B \mid \{ f_\alpha^{n_\alpha} \mid \alpha \in \Gamma\} \right\rangle$ в $\overline{A} = \left\langle A \mid \{ f_\alpha^{n_\alpha} \mid \alpha \in \Gamma\} \right\rangle$, P – предикат на классе алгебр сигнатуры $\{ f_\alpha^{n_\alpha} \mid \alpha \in \Gamma\}$, выделяющий класс подалгебр, замкнутый относительно подалгебр и фактор-алгебр, φ называется P – сервантным вложением [8].

СТАТИЧЕСКИЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРЕДИКАТЫ

Предикат P, т. е. функция с множеством значений из двух элементов $\{0, 1\}$ или {ложь, истина}, т. е. по сути условие, определяющее некоторое свойство множества, выделяет статистические свойства системы, если он не зависит от времени или от изменения иных внешних по отношению к системе факторов. Например, для алгебраических систем, или для класса групп, или для класса абелевых групп свойство сервантности является статическим. Предикат P может выделять динамические свойства системы, если он зависит от времени или от изменения иных внешних по отношению к системе факторов. Например, если рассматриваются финансовые системы и системы знаний о них [9], то предикаты, выделяющие финансовую устойчивость, легальный сектор экономики и т. п., – динамические, то есть зависят от времени, от изменяющихся внутренних условий функционирования общества и т. п. Для систем обучения предикаты, выделяющие уровни сложности обучения, которые, в свою очередь, зависят от степени развития общества, являются динамическими.

Предикат, в отличие от численных показателей, позволяет характеризовать изучаемые свойства в едином целостном комплексе как численных показателей, так и синхронизированных с ними связей, причем в динамике, если это динамические предикаты, и в статике, если это статические предикаты.

Определение 3. Назовем предикат P динамическим, если он представлен в виде $P(X, t)$, где t – время или иной внешний (по отношению к системе X) изменяющийся фактор. Для t можно определить как непрерывную, так и дискретную шкалы.

Определение 4. Подалгебра $\overline{B}=\left\langle B|\{f_\alpha^{n_\alpha}\mid\alpha\in\Gamma\}\right\rangle$ алгебры $\overline{A}=\left\langle A|\{f_\alpha^{n_\alpha}\mid\alpha\in\Gamma\}\right\rangle$ называется P – сервантной подалгеброй алгебры $\overline{A}$, если любой гомоморфизм $\overline{B}\xrightarrow{\alpha}\overline{C}$ подалгебры $\overline{B}$ алгебры $\overline{A}$ в алгебру $\overline{C}$ сигнатуры $\{f_\alpha^{n_\alpha}\mid\alpha\in\Gamma\}$, удовлетворяющую предикату $P(t)$, устойчивому относительно взятия подалгебр и фактор-алгебр, продолжается до гомоморфизма алгебры $\overline{A}=\left\langle A|\{f_\alpha^{n_\alpha}\mid\alpha\in\Gamma\}\right\rangle$ в алгебру $\overline{C}=\left\langle C|\{f_\alpha^{n_\alpha}\mid\alpha\in\Gamma\}\right\rangle$, т. е. диаграмма (2) коммутативна:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \overline{B}=\left\langle B|\{f_\alpha^{n_\alpha}\mid\alpha\in\Gamma\}\right\rangle \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & \overline{A}=\left\langle A|\{f_\alpha^{n_\alpha}\mid\alpha\in\Gamma\}\right\rangle \arrow[dl, dashed, "\beta"] \\ & & \overline{C}=\left\langle C|\{f_\alpha^{n_\alpha}\mid\alpha\in\Gamma\}\right\rangle, & \end{tikzcd} \qquad (2)$$

т. е. выполняется равенство $\beta\varphi=\alpha$, где $P(t)$ – предикат на классе алгебр сигнатуры $\{f_\alpha^{n_\alpha}\mid\alpha\in\Gamma\}$, выделяющий класс подалгебр, замкнутый относительно подалгебр и фактор-алгебр [10], причем предикат P удовлетворяет следующим условиям:

1. $P(A,t), A_1\le A\Rightarrow P(A_1,t)$;
2. $P(A,t), t_1\le t\Rightarrow P(A_1,t_1)$.

Предложенный подход позволяет определять точки равновесия системы, состояние гомеостаза [12] (равновесия) системы и гетеростазиса [13] системы, переход в состояние гистерезиса и количество различных состояний гистерезиса системы, а также гомеорез системы, более подробно рассмотрено в работе Л.В. Глуховой [14]. Для описания максимального числа возможных состояний гистерезиса системы необходимо проанализировать понятия синергетики и эмерджентности, их сходство и различие. Для систем знаний эти понятия важны, поскольку показывают необходимые моменты изменения и корректировки системы знаний, а следовательно, моменты изменения учебных программ и обучающих курсов [15; 16].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА СИНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ СИСТЕМЫ

В работе [17] найдено следующее различие между эмерджентностью и синергетикой: «Ключ к уточнению понятий синергизма и эмерджентности дает определение синергетики, а природа различий – в преимущественном воздействии факторов: внутренние (эндогенные) факторы формируют синергизм, а внешние (экзогенные) – эмерджентность. При этом эмерджентность носит характер разового направляющего воздействия, по своей природе отличающегося от управления». Для теории обучения это позволяет в определенной мере различать направляющие воздействия и управление обучением, т. е. использование всех функций управления с помощью определения числа синергетических эффектов в замкнутой системе, поскольку предложенный нами подход позволяет определять число синергетических эффектов в замкнутой системе [18].

Теорема 1. Число возможных синергетических эффектов системы совпадает с числом неизоморфных решеток ее подсистем.

Теорема 1, таким образом, позволяет определять по числу реализованных синергетических эффектов окончание процесса управления обучением.

СИСТЕМЫ С ПОЛНОЙ РЕАЛИЗАЦИЕЙ ВСЕХ СВЯЗЕЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ПРЕДИКАТУ *P*

Алгебраическую систему, инъективную относительно всех P – сервантных вложений, назовем системой с полной реализацией всех связей, удовлетворяющих предикату P.

Обобщения теорем о строении алгебраически компактных групп и теоремы о том, что любую редуцированную абелеву группу можно вложить в качестве сервантной подгруппы в алгебраически компактную группу (обратный предел циклических групп), дают возможность построить P – сервантное вложение системы в систему с полной реализацией P-связей. Кроме того, для общей теории систем этот подход дает возможность доказать аналог теоремы о том, что алгебраически компактная абелева группа выделяется прямым слагаемым из группы, содержащей ее в качестве сервантной подгруппы: P – сервантная подсистема с полной реализацией P-связей является ретрактом всякой содержащей ее системы. Следствием отсюда является теорема.

Теорема 2. Любая система с полной реализацией P-связей может работать автономно.

Для дистанционного и ускоренного обучения теорема 2 показывает, в частности, недостаточность традиционных средств контроля знаний в Е-режиме (с использованием только электронных средств обучения) и необходимость контроля усвоенного материала и приобретенных навыков по нему на практике, т. е. теорема 2 позволяет обосновать необходимость обучения, в том числе и технологиям.

Частный случай: факторы, воздействующие на систему, определяют группу. В этом случае алгебра $\overline{A}=\left\langle A\,|\,\{f_\alpha^{n_\alpha}\ |\ \alpha\in\Gamma\}\right\rangle$ с основным множеством факторов A и множеством операций $\{f_\alpha^{n_\alpha}\ |\ \alpha\in\Gamma\}$, описывающих взаимодействие факторов, является группой $\overline{A}=\left\langle A\,|^\circ,\ \ ^{-1},e\right\rangle$, где $^\circ$ – операция композиции факторов, т. е. последовательное выполнение (реализация) факторов, $^{-1}$ – операция взятия (реализации) обратного фактора, e – нейтральный фактор.

Диаграмма (1) имеет следующий смысл в классе групп: эпиморфные образы у $\overline{B}$ и $\overline{A}$ в классе всех конечных групп одни и те же.

Для P-сервантностей: эпиморфные образы у $\overline{B}$ и $\overline{A}$ в классе всех групп, удовлетворяющих условию P, одни и те же.

В качестве примеров рассмотрим следующие условия, когда P выделяет:

– класс всех конечных групп в классе абелевых групп, получаем обычную сервантность абелевых групп;

– класс всех абелевых групп в классе всех групп;

– класс всех конечных групп в классе всех групп;

– многообразие в классе всех групп, т. е. класс, замкнутый относительно подгрупп, гомоморфных образов и декартовых произведений, например, бернсайдово многообразие всех групп экспоненты (показателя) n, определяемое тождеством $x^n=1$, многообразие нильпотентных групп класса нильпотентности не больше n, разрешимых групп длины, не превосходящей числа l, и т. п.

СОВОКУПНОСТЬ АВТОМОРФИЗМОВ ГРУППЫ ФАКТОРОВ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СИСТЕМУ

Рассмотрим одинаковые по структуре факторы, действующие на систему.

Напомним, что группы G и G' изоморфны, если между элементами их основных множеств можно установить взаимно-однозначное отображение φ, сохраняющее бинарную операцию. Изоморфизм группы на себя называется автоморфизмом группы. Понятие изоморфизма позволяет выделить алгебраическую бинарную операцию в качестве объекта изучения.

Пусть $\overline{G}=\left\langle G\,|^\circ,\ \ ^{-1},e\right\rangle$ – группа факторов, описывающих систему $\breve{G}$. Тогда группа автоморфизмов $Aut(\overline{G})$ показывает все возможные структуры связей факторов, действующих на систему $\breve{G}$ точно так же, как и $\overline{G}$.

Методы теории групп, также как и методы общей теории алгебраических систем, можно применить к экспертным системам обучения и моделированию финансово-экономических процессов. На языке теории групп нами разработаны модели, показывающие число различных вариантов (сценариев) реализации моделируемого процесса и вид его завершения (итог сценарного завершения процесса), а также динамику процессов в реальном времени.

Рассмотрим применение совокупности автоморфизмов к экспертным системам: на примере алгоритма составления базы ошибок и базы знаний. Предлагаемая формализация позволяет нам построить следующую схему экспертной системы для тестирования, например, по математике, основанную на аппарате теории групп. Для каждой задачи эксперт составляет полное множество ошибок по следующему алгоритму.

Даны: n – количество задач, Q_1, Q_2... Q_n – все имеющиеся задачи базы знаний, поиск задач осуществляется по главному меню экспертной обучающей системы в разделе варианты. Эксперт выписывает атомарные ошибки, т. е. ошибки, содержащие одно ошибочное действие, которые образуют множество всех атомарных ошибок $\{m_j^i\ |\ i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,q_i\}$, где i – номер задачи, j – номер ошибки для рассматриваемой задачи. Композиция (т. е. последовательное выполнение действий) любых ошибок, в том числе атомарных, является ошибкой: $m_j^i * m_r^s, i,s=1,\ldots,n, j,r=1,\ldots,q_i$. Если выполнено ошибочное атомарное действие (совершена атомарная ошибка m_j^i), то действие, обратное к нему, которое мы будем обозначать $\left(m_j^i\right)^{-1}$ (или без круглых скобок $m_j^{i\,-1}$) с помощью $^{-1}$, находящейся в верхнем правом индексе, будет ошибкой, которую мы будем называть обратной ошибкой. Очевидно, что $\left(\left(m_j^i\right)^{-1}\right)^{-1}=e$. Ответ учащегося формально может быть правильным, но в действительности он будет правильным только в том случае, если в его решении не содержится атомарных ошибок, т. е., например, $m_j^i * m_j^{i\,-1}=e$ (нейтральная ошибка) также квалифицируется как ошибка. Таким образом, полная система ошибок может быть описана замкнутой системой (алгеброй) $\aleph=\left\langle G,*,\ \ ^{-1},e\right\rangle$ с основным множеством G, бинарной операцией композиция *, унарной операцией взятия обратного элемента $^{-1}$, нейтральным элементом e (нейтральная ошибка). Будем считать композицию ошибок ассоциативной операцией. Тогда $\aleph$ – свободная группа конечного ранга $k=n\sum_{i=1}^{n}q_i$ в алфавите $\{m_j^i\ |\ i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,q_i\}$.

Теорема 3 (об описании ошибок). Множество всех ошибок определяется не более чем двумя комбинациями слов, представляющих собой композиции атомарных ошибок конечной длины.

Доказательство. Рассмотрим свободную группу $\aleph$ конечного ранга $k=n\sum_{i=1}^{n}q_i$ с образующими $\{m_j^i\ |\ i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,q_i\}$. Поскольку любая свободная группа конечного ранга вкладывается в свободную группу счетного ранга, вложим $\aleph$ в свободную группу счетного ранга F_∞, а F_∞ вложим в коммутант $[\aleph,\aleph]$ группы $\aleph$, являющийся свободной группой счетного ранга. Свободная группа счетного ранга $[\aleph, \aleph]$ вкладывается в свободную группу счетного ранга $[F_2, F_2]$ – коммутант свободной группы F_2 ранга 2. Таким образом, группа $\aleph$ может быть вложена в свободную группу ранга 2, и получается, что существует два слова $w_1(m_j^i \mid i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,q_i)$ и $w_2(m_j^i \mid i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,q_i)$, что $\aleph$ вложима в $F_2 =< w_1(m_j^i \mid i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,q_i),$ $w_2(m_j^i \mid i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,q_i) >$. Теорема доказана.

ПОИСК, ТИПИЗАЦИЯ ОШИБОК И ИХ ШКАЛИРОВАНИЕ

Типовые ошибки, которые выделяют эксперты, можно записать в виде композиции атомарных ошибок, т. е. в виде слов $\omega_\alpha(x_1,\dots,x_n), \alpha\in\Gamma$ в алфавите, тем самым задав группу $\aleph = \langle G \mid \omega_\alpha(x_1,\dots,x_n)=e,\ \alpha\in\Gamma\rangle$ с определяющими соотношениями – группу ошибок задачи. При этом когнитолог, используя лемму ван Кампена [19], может «увидеть» эту группу (в буквальном смысле нарисовать определяющие соотношения группы ошибок – построить диаграмму группы) и проанализировать ее, таким образом, можно осуществлять визуальный анализ логики рассуждений обучаемого. Кроме того, можно построить решетку подгрупп этой группы, дающую возможность графически представить все возможные ошибки в решении задачи *i*.

Введение атомарных ошибок позволяет шкалировать область ошибок и по их длине (без учета нейтральных ошибок): ошибкой длины *l* назовем любое слово $\omega_\alpha(x_1,\dots,x_n), \alpha\in\Gamma$ в алфавите $\{m_j^i \mid i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,q_i\}$, не содержащее композиции вида $\alpha * \alpha^{-1}$.

АЛГОРИТМ СОСТАВЛЕНИЯ БАЗЫ ЗНАНИЙ

Для каждой задачи эксперт составляет полное множество правильных действий по следующему алгоритму. Даны: *n* – количество задач, $Q_1, Q_2 \dots Q_n$ – все имеющиеся задачи базы знаний. Эксперт выписывает множество всех атомарных правильных действий для каждой из задач, т. е. действия, содержащие одно правильное действие, которые образуют множество всех атомарных правильных действий $T=\{\alpha_j^i \mid i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,l_i\}$, где *I* – номер задачи, *j* – номер правильного действия для рассматриваемой задачи. Композиция (т. е. последовательное выполнение действий) любых правильных действий, в том числе атомарных, является правильным действием: $\alpha_j^i * \alpha_r^s$ где $i,s=1,\dots,n; j,r=1,\dots,l_i$. Если выполнено правильное атомарное действие α_j^i, то действие, обратное к нему, обозначаемое символами $\left(\alpha_j^i\right)^{-1}$ или $\alpha_j^{i\,-1}$, а также символом $^{-1}$, будет правильным; его мы будем называть обратным действием. Очевидно, что $\left(\left(m_j^i\right)^{-1}\right)^{-1}=e$. Ответ учащегося формально будет правильным, если в его решении содержится нейтральное правильное действие, которое является композицией взаимно-обратных правильных действий, например, $\alpha_j^i * \alpha_j^{i\,-1}=e$ (нейтральное правильное действие), которое также квалифицируется как действие. Таким образом, полная система правильных действий может быть описана замкнутой системой (алгеброй) $\wp = \langle T, *, \ ^{-1}, e\rangle$ с основным множеством *T*, бинарной операцией композиция *, унарной операцией взятия обратного элемента $^{-1}$, нейтральным элементом *e* (нейтральное правильное действие). Будем считать композицию правильных действий ассоциативной операцией. Тогда $\wp$ – свободная группа конечного ранга $r=n\sum_{i=1}^n l_i$ в алфавите $\{\alpha_j^i \mid i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,l_i\}$.

Теорема 4 (об описании верных решений). Множество всех верных решений определяется не более чем двумя комбинациями слов, представляющих собой композиции атомарных правильных действий конечной длины.

Доказательство. Рассмотрим свободную группу $\wp$ конечного ранга $h=n\sum_{i=1}^n l_i$ с образующими $\{\alpha_j^i \mid i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,l_i\}$.

Поскольку любая свободная группа конечного ранга вкладывается в свободную группу счетного ранга, вложим $\wp$ в свободную группу счетного ранга F_∞, а F_∞ вложим в коммутант $[\wp,\wp]$ группы $\wp$, являющийся свободной группой счетного ранга. Свободная группа счетного ранга $[\wp,\wp]$ вкладывается в свободную группу счетного ранга $[F_2, F_2]$ – коммутант свободной группы F_2 ранга 2. Таким образом, группа $\wp$ может быть вложена в свободную группу ранга 2, и получается, что существует два слова $w_1(\alpha_j^i \mid i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,l_i)$ и $w_2(\alpha_j^i \mid i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,l_i)$, т. е. $\wp$ вложима в $F_2 =< w_1(\alpha_j^i \mid i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,l_i),$ $w_2(\alpha_j^i \mid i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,l_i) >$. Теорема доказана.

ТИПИЗАЦИЯ ПРАВИЛЬНЫХ ДЕЙСТВИЙ И ИХ ШКАЛИРОВАНИЕ

Когнитолог [20] с помощью экспертов определяет все возможные правильные действия – слова $\{\mu_\beta(x_1,\dots,x_n),\ \beta\in B\}$ в алфавите $\{\alpha_j^i \mid i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,l_i\}$, тем самым задавая группу $\mathrm{G}=\langle G \mid \mu_\beta(x_1,\dots,x_n)=e,\ \beta\in B\rangle$ с определяющими соотношениями – группу верных решений задачи. При этом когнитолог, используя лемму ван Кампена [21], может «увидеть» эту группу, т. е. в буквальном смысле нарисовать диаграмму определяющих соотношений группы верных решений задачи и проанализировать с ее помощью логику верного решения задачи. Кроме того, можно построить решетку подгрупп этой группы, дающую возможность графически представить все возможные ошибки в решении задачи. По сути такой подход позволяет представлять логику решения задач в параметрической форме независимо от того, в какой конкретной области задача изначально поставлена.

Введение атомарных правильных действий позволяет шкалировать область решений задачи по их длине (без учета нейтральных правильных действий): правильным действием длины l назовем любую композицию, не содержащую композиции вида $\alpha * \alpha^{-1}$.

АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ, ПРЕДЛАГАЕМЫХ ОБУЧАЕМЫМ

Пусть обучаемый дает полный алгоритм решения задачи с номером i.

1. Выписываем все атомарные действия обучаемого в виде: $\{u_i^s \mid i = 1,\ldots,n;\ s = 1,\ldots,t_i\}$.

2. Выписываем все композиции атомарных действий, приведенные учеником: $\{\nu_\gamma\left(u_i^1,\ldots,u_i^{h_i}\right) \mid i = 1,\ldots,n;\ s = 1,\ldots,h_i\}$, рассматриваем группу Ꙟ, порожденную множеством всех атомарных действий, выполненных учеником: Ꙟ$=\{\nu_\gamma\left(u_i^1,\ldots,u_i^{h_i}\right) \mid i = 1,\ldots,n;\ s = 1,\ldots,h_i\}$, т. е. группу предлагаемого учеником решения. Лемма ван Кампена позволяет «увидеть» эту группу и проанализировать ее. Кроме того, можно построить решетку подгрупп этой группы, дающую возможность графически представить все возможные «ходы» ученика при решении задачи i. Эта группа необязательно конечная, она может быть счетной.

3. Решение верно, если: Ꙟ $\subset \wp$; Ꙟ $\cap \aleph = \langle e \rangle$; получен верный ответ.

Запись верных решений задачи и ошибочных решений можно осуществлять на языке узкого исчисления предикатов (УИП) сигнатуры $\Omega = \langle *,\ ^{-1}, e \rangle$, рассматривая элементарные теории группы верных решений задачи и группы ошибок [21; 22].

Принципы обучения, сформулированные и обоснованные в работе, и теоремы 2, 3, 4 позволяют сформулировать следующие основные требования к интеллектуальной автоматизированной системе оценки результатов контрольной работы: реализация полной системы педагогических связей, основанных на вышеперечисленных принципах (теорема 2); строгое соблюдение предложенных алгоритмов составления базы знаний и базы ошибок (теоремы 3, 4).

МОДЕЛЬ КЛАССИФИКАЦИИ ЭКЗАМЕНА И ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ ОЦЕНКИ ЗНАНИЙ ПО ФОРМАТАМ РАЗМЕРНОСТИ *1D, 2D, 3D... ND*

Составим систему координат – вектор (x_1, x_2... x_n) реализации принципов обучения следующим образом:

x_1 – классификация знаний по широте охвата предметной области;

x_2 – классификация знаний по глубине охвата предметной области;

x_3 – классификация умений и навыков по уровню владения материалом (низкий, средний, высокий, на уровне автоматизма или привычки);

…;

x_n – классификация знаний по показателю i_n,

где i_n – показатель, определяемый на n-м этапе дифференциации оценки знаний, умений и навыков.

Тогда (x_1) можно рассматривать как *1D*-модель, (x_1, x_2) – как *2D*-модель, … , (x_1, x_2... x_n) – как *nD*-модель классификации экзамена и дифференциации оценки знаний по форматам размерностей *1D, 2D, 3D… nD*.

Принципы обучения, сформулированные и обоснованные в работе, и построенная модель классификации экзамена и дифференциации оценки знаний по форматам размерности показывают необходимость поэтапной дифференциации оценки знаний по мере возникновения новых внутрипредметных и междисциплинарных связей.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

Полученные результаты содержат полностью исчерпывающий, готовый к цитированию математический аппарат, включающий в себя следующее:

1. Принципы обучения, сформулированные и обоснованные в работе, в частности в теоремах 2, 3, 4, позволяющие сформулировать следующие основные требования к интеллектуальной автоматизированной системе оценки результатов контроля знаний обучаемых:

– реализация полной системы педагогических связей, основанных на вышеперечисленных принципах (теорема 2);

– строгое соблюдение предложенных алгоритмов составления базы знаний и базы ошибок (теоремы 3, 4);

– поэтапная дифференциация оценки знаний по мере возникновения новых внутрипредметных и междисциплинарных связей (модель классификации экзамена и дифференциации оценки знаний по форматам размерности *1D, 2D, 3D… nD*).

2. Показано, что предлагаемая алгебраическая формализация понятия системы позволяет получать содержательные результаты в теории представления знаний, и в частности, в области экспертных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Serdyukova N., Serdyukov V. The new scheme of a formalization of an expert system in teaching // ICEE/ICIT. Proceedings. 2014. № 32. P. 41–56.
2. Куракин Д.В. Разработка предложений по развитию информационно-коммуникационной инфраструктуры управления научно-инновационной сферой // Информатизация образования и науки. 2013. № 2. С. 31–38.
3. Надеждин Е.Н., Смирнова Е.Е. Методы моделирования и оптимизации интегрированных систем управления организационно-технологическими процессами в образовании. Тула: Тульский гос. ун-т, 2013. 250 с.
4. Месарович М., Такахара Я. Общая теория систем: математические основы. М.: Мир, 1978. 311 с.
5. Месарович М., Мако Д., Такахара И. Теория иерархических многоуровневых систем. М.: Мир, 1973. 342 с.
6. Мальцев А.И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 392 с.
7. Курош А.Г. Теория групп. М.: Наука, 1967. 648 с.
8. Ершов Ю.Л. Разрешимость элементарных теорий некоторых классов абелевых групп // Алгебра и логика. 1963. Т.1. № 6. С. 37–41.

9. Сердюкова Н.А. Об обобщениях сервантности // Алгебра и логика. 1991. Т. 30. № 4. С. 432–456.
10. Курош А.Г. Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебр // Математический сборник. 1947. Т. 20. С. 239–262.
11. Ширшов А.И. Подалгебры свободных коммутативных и свободных антикоммутативных алгебр // Математический сборник. 1954. Т. 34. № 1. С. 81–88.
12. Уемов А.И. Системный подход и общая теория систем. М.: Мысль, 1978. 339 с.
13. Садовский В.Н. Системный подход и общая теория систем: основные проблемы и перспективы развития. М.: Системные исследования, 1987. 454 с.
14. Глухова Л.В. Теоретические основы структурного анализа и синтеза. М.: Институт коммерции и права, 2007. 122 с.
15. Сердюкова Н.А. Оптимизация налоговой системы России. Ч. 1. М.: Академия бюджета и казначейств, 2002. 189 с.
16. Муратов А.С. Синергизм организации в «фокусе» гармонизационного подхода // Управление экономическими системами: электронный научный журнал. 2012. № 2. С. 34.
17. Глухова Л.В., Сердюкова Н.А. Мультиагентная модель управления государственной инновационной системой // Научно-исследовательский финансовый институт. Финансовый журнал. 2014. № 2. С. 81–86.
18. Андреев Э.П. Измерение как средство познания // Вопросы философии. 1982. № 9. С. 87–94.
19. Ручкин В.Н., Романчук В.А., Фулин В.А. Когнитология и искусственный интеллект. Рязань: ИНТЕРМЕТА, 2012. 260 с.
20. Kampen E.R. van. On the connection between the fundamental groups of some related spaces // Amer. J. Math. 1933. Vol. 55. P. 261–267.
21. Гюнцль К. Новое мышление в преодолении прошлого и создания будущего. М.: Республика, 1993. 236 с.
22. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. Основные характеристики надежности и их статистический анализ. М.: Наука, 1965. 524 с.

REFERENCES

1. Serdyukova N., Serdyukov V. The new scheme of a formalization of an expert system in teaching. *ICEE/ICIT. Proceedings*, 2014, no. 32, pp. 41–56.
2. Kurakin D.V. Working-out of proposals for the development of information and communication infrastructure management of science innovation sphere. *Informatizatsiya obrazovaniya i nauki*, 2013, no. 2, pp. 31–38.
3. Nadezhdin E.N., Smirnova E.E. *Metody modelirovaniya i optimizatsii integrirovannykh sistem upravleniya organizatsionno-tekhnologicheskimi protsessami v obrazovanii* [Methods of simulation and optimization of integrated systems of management of organizational-technological processes in education]. Tula, Tulskiy gos. universitet Publ., 2013, 250 p.
4. Mesarovich M., Takakhara Ya. *Obshchaya teoriya sistem: matematicheskie osnovy* [General theory of systems: mathematical basis]. Moscow, Mir Publ., 1978, 311 p.
5. Mesarovich M., Mako D., Takakhara I. *Teoriya ierarkhicheskikh mnogourovnevykh sistem* [Theory of hierarchic multilevel systems]. Moscow, Mir Publ., 1973, 342 p.
6. Maltsev A.I. *Algebraicheskie sistemy* [Algebraic systems]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 392 p.
7. Kurosh A.G. *Teoriya grupp* [Group theory]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 648 p.
8. Ershov Yu.L. Tractability of elementary theories of some classes of Abelian groups. *Algebra i logika,* 1963, vol. 1, no. 6, pp. 37–41.
9. Serdyukova N.A. About the purity extensions. *Algebra i logika*, 1991, vol. 30, no. 4, pp. 432–456.
10. Kurosh A.G. Nonassociative free algebras and free products of algebras. *Matematicheskiy sbornik*, 1947, vol. 20, pp. 239–262.
11. Shirshov A.I. Subalgebras of free Abelian and free anticommutative algebras. *Matematicheskiy sbornik,* 1954, vol. 34, no. 1, pp. 81–88.
12. Uemov A.I. *Sistemniy podkhod i obshchaya teoriya sistem* [System approach and general theory of systems]. Moscow, Mysl Publ., 1978, 339 p.
13. Sadovsky V.N. *Sistemniy podkhod i obshchaya teoriya sistem: osnovnye problemy i perspektivy razvitiya* [System approach and general theory of systems: main issues and development prospects]. Moscow, Sistemnye issledovaniya Publ., 1987, 454 p.
14. Glukhova L.V. *Teoreticheskie osnovy strukturnogo analiza i sinteza* [Theoretical basics of structural analysis and synthesis]. Moscow, Institut kommertsii i prava Publ., 2007, 122 p.
15. Serdyukova N.A. *Optimizatsiya nalogovoy sistemy Rossii* [Optimization of taxation system of Russia]. Moscow, Akademiya byudzheta i kaznacheystv Publ., 2002, part 1, 189 p.
16. Muratov A.S. Synergism of organization in the “spotlight” of harmonization approach. *Upravlenie ekonomicheskimi sistemami: elektronniy nauchniy zhurnal*, 2012, no. 2, p. 34.
17. Glukhova L.V., Serdyukova N.A. Multiagent model of the state innovation system management. *Nauchno-issledovatelskiy finansoviy institut. Finansoviy zhurnal*, 2014, no. 2, pp. 81–86.
18. Andreev E.P. Measurement as a tool of learning. *Voprosy filosofii*, 1982, no. 9, pp. 87–94.
19. Ruchkin V.N., Romanchuk V.A., Fulin V.A. *Kognitologiya i iskusstvenniy intellekt* [Knowledge engineering and artificial intellect]. Ryazan, INTERMETA Publ., 2012, 260 p.
20. Kampen E.R. van. On the connection between the fundamental groups of some related spaces. *Amer. J. Math*., 1933, vol. 55, pp. 261–267.
21. Gyuntsl K. *Novoe myshlenie v preodolenii proshlogo i sozdaniya budushchego* [New thinking in passage of the past and creation of the future]. Moscow, Respublika Publ., 1993, 236 p.
22. Gnedenko B.V., Belyaev Yu.K., Solovyev A.D. *Matematicheskie metody v teorii nadezhnosti. Osnovnye kharakteristiki nadezhnosti i ikh statisticheskiy analiz* [Mathematical methods in the reliability theory. Main characteristics of reliability and their statistical analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1965, 524 p.

ALGEBRAIC APPROACH TO SYSTEM KNOWLEDGE REPRESENTATION IN INTELLIGENT AUTOMATED SYSTEM OF TEACHING AND KNOWLEDGE CONTROL

N.A. Serdyukova, Doctor of Sciences (Economics), Associate Professor, Professor of Chair "Finance and Prices"
Plekhanov Russian University of Economics, Moscow (Russia)
V.I. Serdyukov, Doctor of Sciences (Engineering), Professor, Head of Laboratory
Bauman Moscow State Technical University, Moscow (Russia)
L.V. Glukhova, Doctor of Sciences (Economics), Professor, Professor of Chair "Management of organization"
Tatishchev Volzhsky University, Togliatti (Russia)

Keywords: systems theory; system approach; algebraic systems; results estimation automated system; quality control management; systemic approach formalization.

Abstract: Knowledge intellectualization is one of the components of modern economic development of the country and the main task of the educational system in the whole. The essence of the expected results is reflected in the positive dynamics of new knowledge volume and creation of high-tech educational environment, where the risks of low-quality learning results are minimal. This aspect contributes to the development of new educational systems management tools in their application interpretation. The ability to use the expert systems for quality of training evaluation is one of the highlights of knowledge intellectualization. It is an understudied and not widely interpreted line of applied research. The authors consider the new ideas of designing and development of intelligent automated teaching and control systems which allow practical implementation of new educational technologies and means of educational communications, for example, E-learning technologies.

Basing on the new theory of systems formalization based on the use of algebraic methods, the authors formulated and proved the principles of expert training systems improvement, and considered the requirements for the intelligent automated system of evaluation of knowledge control results. New methods considered in this paper are the further development of the conclusions of famous scientists: A.I. Maltsev – in the algebraic systems theory, A.G. Kurosh – in the theory of groups, and Y.L. Yershov – in the theory of serving embeddings. The authors suggest using an algorithm for building up the knowledge base and mathematical model of the exam, which can be classified by dimensionality formats: 1D, 2D, 3D, ..., nD.

The purpose of the research paper is the familiarization of wide audience with the new methodology of training and control of generated knowledge on the base of instrument of expert technologies and algebraic methods allowing considering the learned material quality characteristics.