

## НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОГО ТЕЛА С ПОЧТИ КРУГОВЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ ПРИ УЧЕТЕ МЕЖФАЗНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

© 2017

*А.Б. Вакаева*, ассистент кафедры «Вычислительные методы механики деформируемого тела»  
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург (Россия)

**Ключевые слова:** почти круговое включение; метод возмущений; интегральное уравнение; концентрация напряжений; межфазное напряжение; комплексные потенциалы.

**Аннотация:** В современной промышленности для изготовления различных элементов конструкций широко применяются композитные материалы, содержащие вырезы и инородные включения. Чтобы обеспечить прочность и надежность работы конструкции, необходимо детально изучить распределение напряжений, возникающих в ней в результате силовых воздействий. Относительно круговых отверстий и включений, на практике не существует идеальных окружностей, и данный факт следует учитывать при расчете. В случае, когда форма границы мало отличается от круговой, для решения задачи можно применить приближенный аналитический метод, именуемый методом возмущений.

Рассматривается плоская задача об определении напряженно-деформированного состояния упругого тела с включением нанометрового размера при действии нагрузки на бесконечности с учетом межфазного напряжения. В отличие от построенных ранее методов решения подобных задач, в которых использовалось конформное отображение, в данном случае считается, что граница включения мало отличается от окружности и определяется произвольной функцией. Предполагается, что тело находится в однородном поле напряжений. На границе контакта двух сред выполнены условия идеального сцепления. Для решения задачи используется поверхностная теория упругости Гертена – Мердока. Методом возмущений решение задачи сводится к однотипному сингулярному интегро-дифференциальному уравнению в каждом приближении, относительно неизвестного межфазного напряжения. Решение интегрального уравнения представляется в виде степенного ряда относительно коэффициентов разложения межфазного напряжения по степеням малого параметра. В первом приближении получено решение для почти кругового включения, граница которого отклоняется от окружности в радиальном направлении по косинусоидальному закону. При помощи программного пакета построены графические зависимости максимального окружного напряжения от радиуса базового кругового включения при одноосном растяжении для включения и матрицы. Продемонстрирован размерный эффект, т. е. влияние размера нановключения на напряженное состояние вблизи включения.

### ВВЕДЕНИЕ

Характерными концентраторами напряжений в материалах и элементах приборов и конструкций являются различного рода отверстия или включения (группы отверстий или включений). Так, на границе кругового отверстия при одноосном растяжении (задача Кирша) возникают напряжения, в три раза превышающие приложенную нагрузку. Однако на практике отверстие считается круговым с некоторой погрешностью, что затрудняет поиск точного решения. Подобное изменение формы поверхности может происходить, например, под воздействием агрессивных сред [1–3], а также ввиду рассогласования кристаллических решеток в материалах [4; 5].

Аналитический метод возмущения границы служит альтернативой конформному отображению для почти круговых отверстий. Для задач с включением решение не может быть получено с помощью конформного отображения, поскольку конформное отображение можно найти либо только для матрицы, либо только для включения. В связи с этим целесообразно применение метода возмущений, который включает в себя математические методы, используемые для нахождения приближенного решения.

Бурное развитие нанотехнологий привело к созданию приборов, элементы которых имеют нанометровый размер (от одного до нескольких десятков нанометров). Обнаружено, что по мере уменьшения размеров деформируемых тел до нанометрового диапазона начинают

проявляться масштабные эффекты их механического поведения. В первую очередь это связано с тем, что физико-механические свойства приповерхностных слоев существенно отличаются от аналогичных свойств в глубине тела [6]. На макроуровне это различие практически не отражается на свойствах и поведении всего тела в целом. Однако в случае наноразмерных структур это различие проявляется, в частности, в заметном влиянии поверхностных напряжений на физические свойства материала.

Состояние поверхности во многих микроэлектронных и оптических устройствах имеет первостепенное значение, особенно на наноструктурном уровне. Не меньшее значение имеет состояние межзеренной границы в кристаллических материалах. На макроуровне влияние слабого искривления границы дефекта на напряженно-деформированное состояние тела было рассмотрено в работе [7].

Для объяснения поверхностных явлений М.Э. Гертена и А.И. Мердока [8] разработали поверхностную теорию упругости, в основе которой лежит понятие поверхностной энергии и поверхностного напряжения, введенное Дж. Гиббсом [9]. В рамках этой теории поверхность твердого тела моделируется как мембрана, когерентно соединенная с основным материалом и обладающая упругими свойствами, отличными от него. Упомянутая теория была подтверждена с помощью метода молекулярной динамики [10], что позволило развить подход, описывающий деформируемое тело как

многоуровневую систему, где поверхностные слои рассматриваются как отдельные подсистемы, обладающие физико-механическими свойствами, отличными от основного материала объемной части. Кроме того, свойства поверхности являются причиной размерных эффектов (size effect), т. е. зависимости уникальных механических свойств материала от параметра размерности длины [11].

В работе [12] для задачи об упругом бесконечном теле при плоской деформации применен метод возмущения границы, позволяющий оценить влияние отклонения границы от окружности на напряженно-деформированное состояние вблизи включения и, в частности, на концентрацию напряжений. В общем случае разработан алгоритм нахождения любого приближения и приведены формулы, по которым это приближение может быть найдено.

Цель работы – исследование напряженного состояния упругого тела с почти круговым нановключением, на границе которого действует межфазное напряжение.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим упругую плоскость комплексного переменного  $z=x_1+ix_2$  с включением нанометрового размера, форма которого мало отличается от круга радиуса  $a$ . Пусть матрице соответствует область  $\Omega_1$ , включению –  $\Omega_2$ . Упругие свойства каждой области  $\Omega_k, k=1, 2$ , определяются коэффициентом Пуассона  $\nu_k$  и модулем сдвига  $\mu_k$ . Общая граница  $\Gamma$  представляется в виде:

$$z \equiv \zeta = \exp(i\theta)\rho = a(1 + \varepsilon f(\theta))\exp(i\theta),$$

где  $f(\theta)$  – непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию  $|f| \leq 1$ ;

$\varepsilon$  – малый параметр, характеризующий максимальное отклонение границы включения от окружности радиуса  $a$ ,  $\varepsilon \ll 1$ .

Предполагаем, что на межфазной границе контакта двух сред  $\Gamma$  отсутствуют разрывы перемещений, а скачок напряжений  $\sigma^k (k=1, 2)$  будем определять через межфазное напряжение  $\tau$ , используя обобщенный закон Лапласа – Юнга [13; 14]. Условия контакта имеют вид:

$$\Delta \sigma_n(\zeta) = \sigma_n^+ - \sigma_n^- = \frac{\tau}{R} - i \frac{1}{h} \frac{d\tau}{d\theta} \equiv t^s(\zeta), \quad (1)$$

$$\Delta u(\zeta) = u^+ - u^- = 0. \quad (2)$$

Считаем, что на границе  $\Gamma$  действуют нормальные  $\sigma_{nn}$  и касательные  $\sigma_{nt}$  усилия в локальной декартовой прямоугольной системе координат  $n, t$  (в уравнениях (1), (2) ось  $n$  перпендикулярна  $\Gamma$ ). Эти усилия определяются действием межфазного напряжения  $\tau$ , характерного для наномасштабных структур, отнесенного к радиусу  $a$ .

$$u = u_1 + iu_2;$$

$u_1, u_2$  – компоненты вектора перемещений;

$h$  – метрический коэффициент;

$R$  – радиус кривизны.

В формулах (1), (2) введены обозначения:  $\sigma_n^\pm = \lim_{z \rightarrow \zeta \in \Gamma} \sigma_n(z)$ ,  $u^\pm = \lim_{z \rightarrow \zeta \in \Gamma} u(z)$ . Знак « $\leftarrow$ » берется при  $z \in \Omega_1$ , а « $\rightarrow$ » – при  $z \in \Omega_2$ .

На рис. 1 кривая построена при  $f(\theta) = \cos 2\theta$ , ее максимальное отклонение от единичной окружности  $\varepsilon = 0,1$ . Данная функция используется в работе для получения численных результатов.

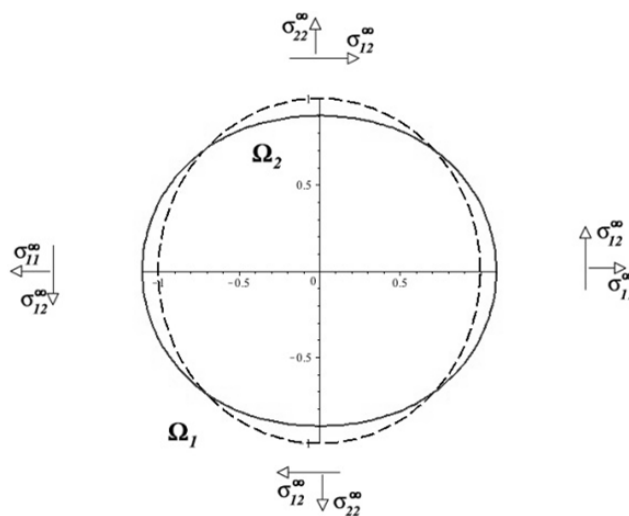


Рис. 1. Почти круговое включение (сплошная линия) в бесконечной упругой пластине под действием усилий на бесконечности ( $\varepsilon=0,1$ )

На бесконечности заданы напряжения  $\sigma_{ij}^\infty$  и угол поворота  $\omega^\infty$ . Для случая плоской деформации определяющие соотношения поверхностной и объемной теории упругости, согласно [8; 14], можно записать в следующем виде:

$$\tau = \gamma_0 + (\lambda_s + 2\mu_s)\varepsilon_{tt}^s, \quad \sigma_{33}^s = \gamma_0 + (\lambda_s + \gamma_0)\varepsilon_{tt}^s, \quad (3)$$

$$\sigma_{nn} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{nn} + \lambda\varepsilon_{tt}, \quad \sigma_{nt} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{nt} + \lambda\varepsilon_{nn}. \quad (4)$$

В равенствах (3), (4) величина  $\gamma_0$  – остаточное поверхностное напряжение, которое действует при отсутствии деформаций;

$\varepsilon_{tt}^s$  – окружная поверхностная деформация;

$\lambda_s$  и  $\mu_s$  – модули поверхностной упругости, аналогичные постоянным Ламе  $\lambda$  и  $\mu$  для объемной изотропной упругости;

$\varepsilon_{ij}$  – компоненты объемной деформации.

Из условия непрерывности перемещений при переходе от  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  к границе  $\Gamma$  получим условие непрерывности деформации  $\varepsilon_{tt}$ :

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \varepsilon_{tt}^k = \varepsilon_{tt}^s, \quad k = 1, 2.$$

### МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ

Методы и подходы к решению поставленной задачи представляют собой сочетание классических и современных методов, применяемых в теории упругости. Теоретические выкладки и исследования основаны на использовании аппарата теории аналитических функций, соотношений объемной и поверхностной теории упругости, комплексных потенциалов Гурса – Колосова, соотношений Колосова – Мусхелишвили [15], метода

возмущений, интегралов типа Коши, численных методов решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений.

Согласно [16], для каждой области  $\Omega_k$  связь напряжений и перемещений с комплексными потенциалами  $\Phi_k(z)$ ,  $Y_k(z)$  может быть записана в виде единой формулы:

$$\sigma_n^k(z) = \Phi_k(z) + \overline{\Phi_k(z)} + \left[ \frac{1}{z^2} \left( \overline{\Phi_k(z)} + Y_k\left(\frac{1}{z}\right) \right) + \left( z - \frac{1}{z} \right) \overline{\Phi_k'(z)} \right] \frac{dz}{dz}$$

где  $z \in \Omega_k$ ;  
 $dz = |dz|e^{i\theta}$ ;

$\alpha$  – угол между площадкой и осью  $x_1$ .

Функции  $\Phi_k(z)$ ,  $k=1, 2$ , голоморфны в соответствующих областях  $\Omega_k$ ,  $Y_k(z)$  – в областях  $\tilde{\Omega}_k(z) = \left\{ z : z^{-1} \in \Omega_k \right\}$

с границей  $\Gamma_1$ , которая симметрична кривой  $\Gamma$  относительно единичной окружности.

В силу того, что форма границы зависит от малого параметра  $\varepsilon$ , комплексные потенциалы  $\Phi_k(z)$ ,  $Y_k(z)$  и функция  $\tau$  также должны зависеть от этого параметра, и, следовательно, их можно представить в виде сходящихся степенных рядов по  $\varepsilon$ , согласно методу возмущений [7; 17–19]. Используя упомянутые методы и подходы, решение задачи сводим к системе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений относительно функций  $\tau_n$  [17; 19–21]:

$$\tau_n(s) + \frac{M(\kappa + 1)}{2a - M(\kappa - 1)} \times \times \Re \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{\tau_n(\eta) + \eta \tau_n'(\eta)}{\eta - s} d\eta \right) = G_n(s)$$

где  $s = e^{i\theta}$ ;

$M = (\lambda_s + 2\mu_s) / 2\mu$ ;

$\kappa = (\lambda + 3\mu) / (\lambda + \mu)$ ;

$G_n$  – известная функция, зависящая от предыдущих приближений.

Следуя алгоритму решения интегрального уравнения, межфазное напряжение ищем в виде степенного ряда с неизвестными коэффициентами. Коэффициенты межфазного напряжения в первом приближении будут зависеть от результатов нулевого приближения.

### РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

На рис. 2 построены зависимости максимального значения окружного напряжения  $\sigma_{\theta\theta}^s$  ( $k=1, 2$ ) от радиуса  $a$  при одноосном растяжении  $\sigma_{22}^\infty$  вдоль оси  $x_2$  при  $\theta=0$ . Здесь введено обозначение для коэффициента концентрации напряжений  $S = \max \sigma_{\theta\theta}^k / \sigma_{22}^\infty$ . Исследования проведены для алюминия [14], упругие свойства поверхности которого определяются либо значением  $M = -0,152$  нм (на рис. 2 кривые 1 и 4), либо  $M = 0,1$  нм (на рис. 2 кривые 2 и 5). На рис. 2 кривые 1–3 соответствуют максимальному значению окружного напряжения в матрице, а кривые 4–6 – максимальному значению окружного напряжения во включении. Численные результаты получены для различных значений параметра  $m = \mu_2 / \mu_1$ .

Анализ зависимостей на рис. 2 показывает, что для более мягкого почти кругового включения (при  $m < 1$ ) концентрация напряжений во включении и в матрице больше, чем в случае кругового включения, соответствующего нулевому приближению. В то же время концентрация напряжений в матрице больше, чем во включении (рис. 2 а). В случае, когда включение более жесткое, чем матрица ( $m > 1$ ), результаты противоположны (рис. 2 б).

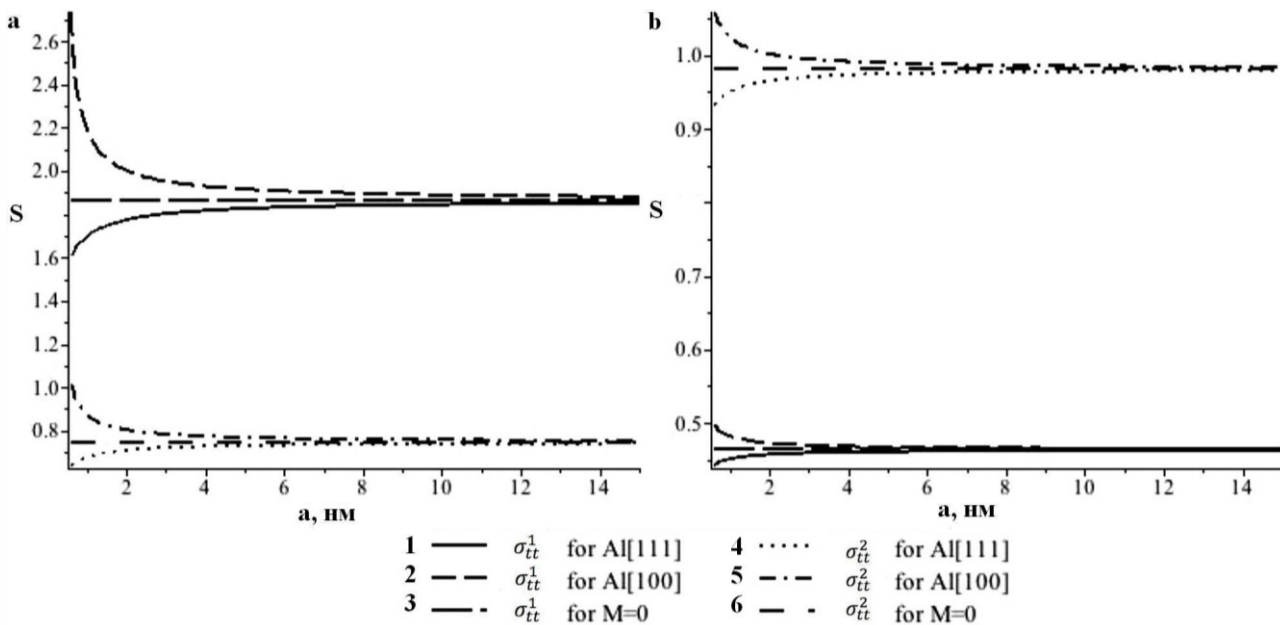


Рис. 2. Зависимость максимального окружного напряжения  $\sigma_{\theta\theta}^k$  от радиуса базового кругового включения  $a$  для функции  $f(\theta) = \cos 2\theta$  при  $\varepsilon = 0,1$ ,  $m = 1/3$  (а);  $m = 10/3$  (б)

**ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ**

В работе проанализирована математическая модель упругого материала с наноразмерным включением. В частности:

1) для задачи об упругом теле с почти круговым наноразмерным включением при плоской деформации на основе метода возмущений построено аналитическое приближенное решение, позволяющее оценить влияние погрешности на напряженное состояние вблизи включения;

2) разработан алгоритм составления последовательности интегральных уравнений для вычисления неизвестного межфазного напряжения в каждом приближении;

3) численные результаты получены в первом приближении для почти кругового нановключения, граница которого задана по косинусоидальному закону;

4) при помощи программного пакета построены графики зависимостей максимального значения окружного напряжения от радиуса базового кругового включения в матрице и во включении для различных материалов;

5) исследовано влияние межфазных эффектов вблизи концентраторов напряжений в виде почти круговых включений различной формы. Так, с уменьшением радиуса  $a$  при  $M > 0$  максимальные значения окружного напряжения неограниченно убывают, а при  $M < 0$  – возрастают. Таким образом, продемонстрирован размерный эффект, характерный для наноструктурированных материалов.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Стоит отметить, что представленные результаты являются новыми и несут важный, как прикладной, так и теоретический характер. Построенные аналитические решения для упругих тел с наноразмерными включениями при учете межфазного напряжения позволяют формулировать и решать широкий класс задач об определении напряженно-деформированного состояния тела при различных видах нагрузки. Решения таких задач могут быть полезными при проектировании и эксплуатации приборов микро- и оптоэлектроники с улучшенными рабочими характеристиками. Разработанные методы решения задач могут использоваться в том числе и для оценки прочности и надежности изделий промышленности. Изучив влияние рассмотренных параметров на концентрацию напряжений, можно оценить долговечность при конструировании разнообразных деталей, а также составить прогноз поведения используемого материала в интересующих условиях эксплуатации.

*Статья подготовлена по материалам докладов участников VIII Международной школы «Физическое материаловедение» с элементами научной школы для молодежи, Тольятти, 3–12 сентября 2017 г.*

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Sedova O.S., Pronina Y.G. Initial boundary value problems for mechanochemical corrosion of a thick spherical member in terms of principal stress // AIP Conference Proceedings. 2015. Vol. 1648. P. 260002.
2. Sedova O.S., Pronina Yu.G. Calculation of the optimal initial thickness of a spherical vessel operating in mechanochemical corrosion conditions // Proceedings

- of the 2015 International Conference “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov. St. Petersburg, 2015. P. 436–439.
3. Pronina Y.G. An analytical solution for the mechanochemical growth of an elliptical hole in an elastic plane under a uniform remote load // European Journal of Mechanics, A/Solids. 2017. Vol. 61. P. 357–363.
4. Шувалов Г.М., Костырко С.А. Влияние формы возмущения на морфологическую устойчивость поверхности многослойного пленочного покрытия при поверхностной диффузии // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 301–305.
5. Шувалов Г.М., Костырко С.А. Второе приближение метода возмущений в задаче о твердом теле со слабо искривленной границей // Процессы управления и устойчивость. 2017. Т. 4. № 1. С. 256–260.
6. Подстригач Я.С., Повстенко Ю.З. Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах. Киев: Наукова думка, 1985. 200 с.
7. Вакаева А.Б., Греков М.А. Исследование напряженно-деформированного состояния упругого тела с почти круговыми дефектами // Процессы управления и устойчивость. 2014. Т. 1. № 1. С. 111–116.
8. Gurtin M.E., Murdoch A.I. Surface stress in solids // International Journal of Solid Structures. 1978. Vol. 14. № 6. P. 431–440.
9. Gibbs J.W. The Scientific Papers of J. Willard Gibbs. Vol. 1. London: Longmans-Green, 1906. 476 p.
10. Miller R.E., Shenoy V.B. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements // Nanotechnology. 2000. Vol. 11. № 3. P. 139–147.
11. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Устинов К.Б. Влияние остаточных поверхностных напряжений и поверхностной упругости на деформирование шарообразных включений нанометровых размеров в упругой матрице // Физическая мезомеханика. 2010. Т. 13. № 5. С. 127–138.
12. Grekov M.A., Vakaeva A.B. The perturbation method in the problem on a nearly circular inclusion in an elastic body // Proceedings of the 7th International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering (Coupled Problems 2017). Rhodes, 2017. P. 963–971.
13. Vikulina Yu.I., Grekov M.A. The stress state of planar surface of a nanometer-sized elastic body under periodic loading // Vestnik St. Petersburg University: Mathematics. 2012. Vol. 45. № 4. P. 174–180.
14. Grekov M.A., Yazovskaya A.A. The effect of surface elasticity and residual surface stress in an elastic body with an elliptic nanohole // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2014. Vol. 78. № 2. P. 172–180.
15. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
16. Grekov M.A. Joint deformation of a circular inclusion and a matrix // Vestnik St. Petersburg University: Mathematics. 2010. Vol. 43. № 2. P. 114–121.
17. Вакаева А.Б., Греков М.А. Напряженно-деформированное состояние упругого тела с почти круговым отверстием при учете поверхностного напряжения // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 125–130.
18. Kostyrko S.A., Shuvalov G.M. Morphological stability of during diffusion processes // Proceedings of the 2015

- International Conference “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov. St. Petersburg, 2015. P. 392–395.
19. Вакаева А.Б. Эффект поверхностных напряжений и формы нанометрового рельефа поверхности отверстия в упругом теле // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 154–158.
  20. Grekov M.A., Vakaeva A.B. Effect of nanosized asperities at the surface of a nanohole // Proceedings of the 7th European Congress on Computational Methods in Applied Science and Engineering. 2016. Vol. 4. P. 7875–7885.
  21. Kostyrko S.A., Altenbach H., Grekov M.A. Stress concentration in ultra-thin coating with undulated surface profile // Proceedings of the 7th International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering (Coupled Problems 2017). Rhodes, 2017. P. 1183–1192.
- REFERENCES**
1. Sedova O.S., Pronina Y.G. Initial boundary value problems for mechanochemical corrosion of a thick spherical member in terms of principal stress. *AIP Conference Proceedings*, 2015, vol. 1648, pp. 260002.
  2. Sedova O.S., Pronina Yu.G. Calculation of the optimal initial thickness of a spherical vessel operating in mechanochemical corrosion conditions. *Proceedings of the 2015 International Conference “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov*. St. Petersburg, 2015, pp. 436–439.
  3. Pronina Y.G. An analytical solution for the mechanochemical growth of an elliptical hole in an elastic plane under a uniform remote load. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 2017, vol. 61, pp. 357–363.
  4. Shuvalov G.M., Kostyrko S.A. Effect of perturbation from on morphological stability of multilayer film surface during surface diffusion. *Protsessy upravleniya i ustoychivost'*, 2016. vol. 3, no. 1, pp. 301–305.
  5. Shuvalov G.M., Kostyrko S.A. Second-order perturbation method for elastic solid with slightly curved boundary. *Protsessy upravleniya i ustoychivost'*, 2017, vol. 4, no. 1, pp. 256–260.
  6. Podstrigach Ya.S., Povstenko Yu.Z. *Vvedenie v mekhaniku poverkhnostnykh yavleniy v deformiruemyykh telakh* [An introduction to the mechanics of surface phenomena in deformable solids]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1985. 200 p.
  7. Vakaeva A.B., Grekov M.A. Investigation of the stress-strain state of an elastic body with almost circular defects. *Protsessy upravleniya i ustoychivost'*, 2014, vol. 1, no. 1, pp. 111–116.
  8. Gurtin M.E., Murdoch A.I. Surface stress in solids. *International Journal of Solid Structures*, 1978, vol. 14, no. 6, pp. 431–440.
  9. Gibbs J.W. *The Scientific Papers of J. Willard Gibbs*. Vol. 1. London, Longmans-Green, 1906. 476 p.
  10. Miller R.E., Shenoy V.B. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements. *Nanotechnology*, 2000, vol. 11, no. 3, pp. 139–147.
  11. Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Ustinov K.B. Effect of residual surface stress and surface elasticity on deformation of nanometer spherical inclusions in an elastic matrix. *Physical Mesomechanics*, 2010, vol. 13, no. 5-6, pp. 318–328.
  12. Grekov M.A., Vakaeva A.B. The perturbation method in the problem on a nearly circular inclusion in an elastic body. *Proceedings of the 7th International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering (Coupled Problems 2017)*. Rhodes, 2017, pp. 963–971.
  13. Vikulina Yu.I., Grekov M.A. The stress state of planar surface of a nanometer-sized elastic body under periodic loading. *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics*, 2012, vol. 45, no. 4, pp. 174–180.
  14. Grekov M.A., Yazovskaya A.A. The effect of surface elasticity and residual surface stress in an elastic body with an elliptic nanohole. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, vol. 78, no. 2, pp. 172–180.
  15. Muskhelishvili N.I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 707 p.
  16. Grekov M.A. Joint deformation of a circular inclusion and a matrix. *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics*, 2010, vol. 43, no. 2, pp. 114–121.
  17. Vakaeva A.B., Grekov M.A. Stress-strain state of an elastic body with a nearly circular hole incorporating surface stress. *Protsessy upravleniya i ustoychivost'*, 2015, vol. 2, no. 1, pp. 125–130.
  18. Kostyrko S.A., Shuvalov G.M. Morphological stability of during diffusion processes. *Proceedings of the 2015 International Conference “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov*. St. Petersburg, 2015, pp. 392–395.
  19. Vakaeva A.B. Effect of surface stresses and the shape of nanometer surface relief of a hole in an elastic body. *Protsessy upravleniya i ustoychivost'*, 2016, vol. 3, no. 1, pp. 154–158.
  20. Grekov M.A., Vakaeva A.B. Effect of nanosized asperities at the surface of a nanohole. *Proceedings of the 7th European Congress on Computational Methods in Applied Science and Engineering*. Crete, 2016, vol. 4, pp. 7875–7885.
  21. Kostyrko S.A., Altenbach H., Grekov M.A. Stress concentration in ultra-thin coating with undulated surface profile. *Proceedings of the 7th International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering (Coupled Problems 2017)*. Rhodes, 2017, pp. 1183–1192.

**STRESS-STRAIN STATE OF AN ELASTIC BODY  
WITH A NEARLY CIRCULAR INCLUSION INCORPORATING INTERFACIAL STRESS**

© 2017

*A.B. Vakaeva*, assistant of Chair “Computational Methods in Continuum Mechanics”  
*St. Petersburg State University, St. Petersburg (Russia)*

*Keywords:* nearly circular inclusion; perturbation method; integral equation; stress concentration; interfacial stress; complex potentials.

*Abstract:* In modern industry, to produce various structure elements, composite materials containing cutouts and foreign inclusions are widely used. To provide the integrity of a construction, it is necessary to study in details the distribution of stresses occurring in it in the result of force actions. Concerning the circular holes and inclusions, in practice, the ideal circles do not exist, and this fact should be taken into account when calculating. In the case when the boundary form slightly differs from the circular, to solve the problem, it is possible to apply the approximate analytical method that is called the perturbation method.

The plane problem on a nanoinclusion in an infinite elastic body under arbitrary remote loading is considered. It's assumed that the shape of the inclusion is weakly deviated from the circular one and the complementary interfacial stresses are acting at the boundary. In contrast with previously constructed methods for solving such problems, the solution is built without the use of conformal mapping. Contact of the inclusion with the matrix satisfies to the ideal conditions of cohesion. To solve this problem, Gurtin – Murdoch surface elasticity model is used. Based on Goursat – Kolosov complex potentials and the boundary perturbation technique, the solution of the problem is reduced to the singular integro-differential equation for any-order approximation. The algorithm of solving this integral equation is constructed in the form of a power series. The solution in the first-order approximation for the periodic shape of the inclusion determined by the cosine function is obtained. With the help of software package, for the inclusion and the matrix the graphic dependence of maximum hoop stresses upon the radius of basic circular inclusion under uniaxial tension are built. The size effect in the form of the dependence of the stress distribution at the interface on the size of the inclusion is demonstrated.