

Комбинация круговых движений в машинах и механизмах

© 2021

Попов Игорь Павлович, кандидат технических наук, старший преподаватель
Курганский государственный университет, Курган (Россия)

E-mail: ip.popov@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8683-0387>

Аннотация: В технических системах, в том числе в авиационной и космической технике, в частности в авиационных трансмиссиях, подшипниках, орбитальных системах, вертолетных механизмах и многих других, широко распространены комбинированные вращательные движения, и при конструировании важно представлять характер суммарного движения. Цель исследования состоит в обобщении принципа комбинации движений на круговые движения. Рассматривается координатная система $x'O'y'$, которая вращается в координатной системе xOy без углового ускорения со скоростью ω . Радиус вращения равен ρ_1 . При этом $Ox \parallel O'x'$, $Oy \parallel O'y'$. Объект a вращается в координатной системе $x'O'y'$ без углового ускорения со скоростью $\pm\omega$. Радиус вращения равен ρ_2 . Установлено, что при вращениях в противоположные стороны траектория суммарного движения представляет собой эллипс. Определены все стандартные характеристики эллипса применительно к рассматриваемому случаю. Установлен наклон эллиптической траектории. Показано, что если траектория суммарного движения является эллиптической и полуоси равны $(\rho_1+\rho_2)$ и $|\rho_1-\rho_2|$, то объект a совершает круговое движение в координатной системе $x'O'y'$ без углового ускорения со скоростью $-\omega$. Подобно тому как результатом суперпозиции двух неускоренных прямолинейных движений является также неускоренное, т. е. равномерное и прямолинейное, движение, при вращениях в одну сторону траектория суммарного движения представляет собой окружность. При круговых движениях с кратными скоростями траектории суммарного движения представляют собой улитки. Практический аспект исследования определяется тем, что полученные формулы могут непосредственно использоваться в САПР при выполнении конструкторских работ.

Ключевые слова: комбинация движений; круговые движения; эллиптическая траектория; круговая траектория; кратные скорости.

Для цитирования: Попов И.П. Комбинация круговых движений в машинах и механизмах // Frontier Materials & Technologies. 2021. № 4. С. 48–56. DOI: 10.18323/2782-4039-2021-4-48-56.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование относится к кинематике машин и механизмов, играющей важную роль в технологии машиностроения. С развитием и повсеместным внедрением систем автоматизированного проектирования (САПР) приобретает актуальность аналитическое описание траекторий исполнительных органов технических систем, совершающих сложное движение [1–3]. Проблема состоит в том, что комбинация наиболее распространенных простых вращательных движений порождает сложные траектории, аналитическое описание которых неочевидно [4–6], что затрудняет использование САПР [7–9].

В части комбинации движений в литературе исчерпывающе описаны комбинированные линейные движения [10–12]. При этом результатом суперпозиции двух неускоренных прямолинейных движений является также неускоренное, т. е. равномерное и прямолинейное, движение (рис. 1). Здесь v_1 – скорость координатной системы $x'O'y'$ в координатной системе xOy ; v_2 – скорость объекта a в координатной системе $x'O'y'$; v_3 – скорость объекта a в координатной системе xOy . Очевидно, что конец вектора A описывает отрезок прямой линии. Этот же принцип используется при описании неускоренных прямолинейных движений в технических системах [13; 14].

В литературе описаны и комбинированные круговые движения [15; 16]. Однако аналитические описания результирующих траекторий при этом не рассматриваются.

Значение круговых движений для технических приложений и особенно для машиностроения значительно выше, чем прямолинейных. В подавляющей части машин и механизмов, в том числе в металлорежущих станках, исполнительные органы совершают именно круговые движения. Даже те механические устройства, рабочие органы которых совершают прямолинейные перемещения, имеют силовой привод вращательного действия. В немалой степени это обусловлено тем, что электротехническая промышленность выпускает электрические двигатели преимущественно вращательного действия. Свою роль играет то, что вращательное движение несопоставимо легче и проще трансформировать, чем прямолинейное.

Помимо указанных очевидных преимуществ кругового движения над прямолинейным есть еще один весомый аргумент в пользу первого. Прямолинейные перемещения исполнительных органов машин и механизмов в силу их конечных размеров являются, как правило, возвратно-поступательными. При таком характере движения массивных деталей и узлов развивается значительная реактивная механическая мощность [17], которая за счет электромеханических преобразований в силовом электроприводе трансформируется в электрическую реактивную мощность питающей сети, существенно ухудшая качество электрической энергии. Причина этого вредного явления заключается в том, что кинетическая энергия массивного узла или детали, совершающих возвратно-поступательные (осциллирующие) движения, непрерывно изменяется.

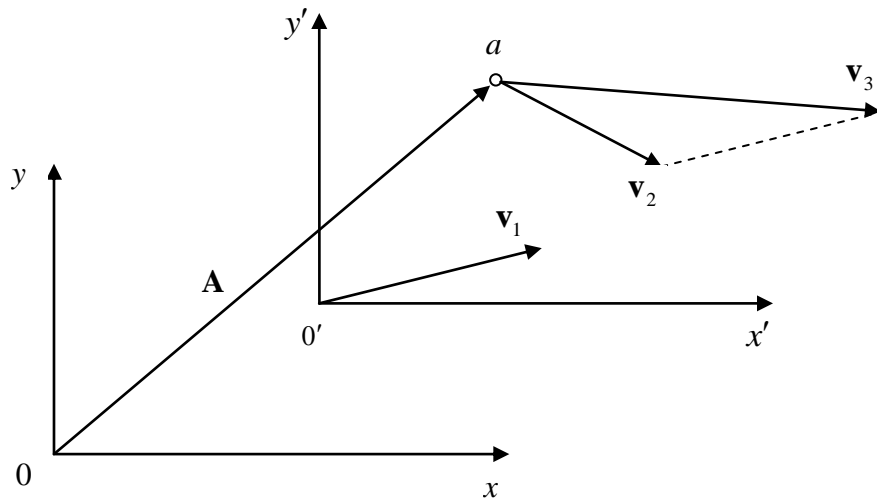


Рис. 1. Сложение неускоренных движений
Fig. 1. Composition of non-accelerated motions

При вращательном же движении в установившемся режиме кинетическая энергия неизменна и механическая реактивная (знакопеременная) мощность не развивается. Таким образом, вращательное движение энергетически несопоставимо выгоднее прямолинейного.

В источниках [18–20] представлены различные аспекты функционирования САПР. При этом вопросы использования математических описаний перемещений при проектировании не затрагиваются.

Несмотря на то, что комбинированные круговые движения широко распространены в технологических операциях, соответствующие им траектории не имеют аналитических описаний.

Цель исследования – обобщение принципа комбинации движений на круговые движения, задача – получение математических формул, описывающих траектории комбинированных круговых движений.

МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ

Искомые результаты устанавливаются методом доказательства теорем. При этом отправными точками математических рассуждений являются широко известные истинные высказывания, в том числе описания положения точек в декартовой системе координат. К ним применяются формально-тождественные математические операции. Поэтому истинность окончательного результата эквивалентна истинности исходного высказывания, которая не может вызывать сомнений.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Пусть координатная система $x'O'y'$ вращается в координатной системе xOy без углового ускорения со скоростью ω . Радиус вращения равен ρ_1 . При этом $Ox \parallel O'x'$, $Oy \parallel O'y'$. Объект a вращается в координатной системе $x'O'y'$ без углового ускорения со скоростью $\pm\omega$. Радиус вращения равен ρ_2 .

Вращения в противоположные стороны

Теорема 1. При вращениях в противоположные стороны траектория суммарного движения представляет собой эллипс.

Доказательство.

В координатной системе xOy начало O' координатной системы $x'O'y'$ определяется следующим образом:

$$x_1 = \rho_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad y_1 = \rho_1 \sin(\omega t + \varphi_1). \quad (1)$$

В координатной системе $x'O'y'$ объект a , соответственно, определяется:

$$x_2 = \rho_2 \cos(-\omega t + \varphi_2), \quad y_2 = \rho_2 \sin(-\omega t + \varphi_2),$$

где φ_1, φ_2 – начальные фазы.

В координатной системе xOy объект a определяется следующим образом:

$$x = x_1 + x_2 = \rho_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + \rho_2 \cos(-\omega t + \varphi_2),$$

$$y = y_1 + y_2 = \rho_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \rho_2 \sin(-\omega t + \varphi_2).$$

$$x = \cos \omega t (\rho_1 \cos \varphi_1 + \rho_2 \cos \varphi_2) - \sin \omega t (\rho_1 \sin \varphi_1 - \rho_2 \sin \varphi_2),$$

$$y = \sin \omega t (\rho_1 \cos \varphi_1 - \rho_2 \cos \varphi_2) + \cos \omega t (\rho_1 \sin \varphi_1 + \rho_2 \sin \varphi_2).$$

Из этих выражений определяются:

$$\sin \omega t = \frac{y(\rho_1 \cos \varphi_1 + \rho_2 \cos \varphi_2) - x(\rho_1 \sin \varphi_1 + \rho_2 \sin \varphi_2)}{\rho_1^2 - \rho_2^2},$$

$$\cos \omega t = \frac{x(\rho_1 \cos \varphi_1 - \rho_2 \cos \varphi_2)}{\rho_1^2 - \rho_2^2} + \frac{y(\rho_1 \sin \varphi_1 - \rho_2 \sin \varphi_2)}{\rho_1^2 - \rho_2^2}$$

$$\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1,$$

$$\begin{aligned} & \frac{y^2(\rho_1 \cos \varphi_1 + \rho_2 \cos \varphi_2)^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} + \\ & + \frac{x^2(\rho_1 \sin \varphi_1 + \rho_2 \sin \varphi_2)^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} - \\ & - \frac{2xy(\rho_1 \cos \varphi_1 + \rho_2 \cos \varphi_2)(\rho_1 \sin \varphi_1 + \rho_2 \sin \varphi_2)}{\rho_1^2 - \rho_2^2} + \\ & + \frac{x^2(\rho_1 \cos \varphi_1 - \rho_2 \cos \varphi_2)^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} + \\ & + \frac{y^2(\rho_1 \sin \varphi_1 - \rho_2 \sin \varphi_2)^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} + \\ & + \frac{2xy(\rho_1 \cos \varphi_1 - \rho_2 \cos \varphi_2)(\rho_1 \sin \varphi_1 - \rho_2 \sin \varphi_2)}{\rho_1^2 - \rho_2^2} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{x^2[\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)]}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} + \\ & \frac{y^2[\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)]}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} - \\ & - \frac{4xy\rho_1\rho_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} = 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Последнее выражение представляет собой формулу эллипса.

Теорема доказана.

Теорема 2. Полуоси фигуры (2) определяются как $(\rho_1 + \rho_2)$ и $|\rho_1 - \rho_2|$.

Доказательство.

При условии $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ выражение (2) приводится к канонической форме:

$$\begin{aligned} & \frac{x^2(\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2)}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} + \frac{y^2(\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2)}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} = 1, \\ & \frac{x^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} + \frac{y^2}{(\rho_1 - \rho_2)^2} = 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Теорема доказана.

Следствие 2-1. Если $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, то траектория суммарного движения является прямолинейной. Ее длина равна 4ρ .

Далее в следствиях 2-2–2-4 представлены стандартные характеристики эллипса применительно к рассматриваемому случаю.

Следствие 2-2. Эксцентриситет

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\rho_1\rho_2}}{(\rho_1 + \rho_2)/2}.$$

Следствие 2-3. Для формы (3) справедливо выражение для фокусов

$$f_{1,2} = (\pm 2\sqrt{\rho_1\rho_2}, 0).$$

Следствие 2-4. Корни характеристического уравнения

$$\lambda_1 = (\rho_1 + \rho_2)^2, \quad \lambda_2 = (\rho_1 - \rho_2)^2.$$

Теорема 3. В координатной системе xOy эллиптическая траектория имеет наклон $(\varphi_1 + \varphi_2)/2$.

Доказательство.

Если форму (3) повернуть на $(\varphi_1 + \varphi_2)/2$, она преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\left(x \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + y \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} + \\ & + \frac{\left(-x \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + y \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)^2}{(\rho_1 - \rho_2)^2} = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{x^2[\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)]}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} + \\ & \frac{y^2[\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)]}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} - \\ & - \frac{4xy\rho_1\rho_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} = 1. \end{aligned}$$

Это выражение идентично формуле (2).

Теорема доказана.

Пример. Если $\varphi_1 = 120^\circ$, $\varphi_2 = -30^\circ$, то эллиптическая траектория имеет наклон $(\varphi_1 + \varphi_2)/2 = (120 - 30)/2 = 45^\circ$ (рис. 2).

Нетрудно доказать теорему, обратную первой.

Теорема 4. Если траектория суммарного движения является эллиптической и полуоси равны $(\rho_1 + \rho_2)$ и $|\rho_1 - \rho_2|$, то объект a совершает круговое движение в координатной системе $x'O'y'$ без углового ускорения со скоростью $-\omega$.

Доказательство.

Пусть $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ (канонический случай) и $\rho_1 > \rho_2$.

В координатной системе xOy начало O' координатной системы $x'O'y'$ описывается формулами (1). При этом объект a в системе xOy определяется в соответствии с параметрическими формулами:

$$x = (\rho_1 + \rho_2) \cos \omega t, \quad y = (\rho_1 - \rho_2) \sin \omega t.$$

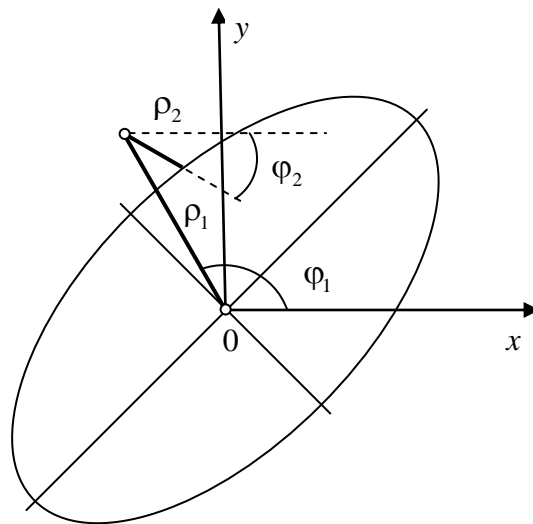


Рис. 2. Эллиптическая траектория
Fig. 2. Elliptical trajectory

Поскольку $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, то в координатной системе $x'O'y'$ объект a определяется следующим образом:

$$x_2 = x - x_1 = (\rho_1 + \rho_2) \cos \omega t - \rho_1 \cos \omega t = \rho_2 \cos \omega t = \rho_2 \cos(-\omega t),$$

$$y_2 = y - y_1 = (\rho_1 - \rho_2) \sin \omega t - \rho_1 \sin \omega t = -\rho_2 \sin \omega t = \rho_2 \sin(-\omega t).$$

Это параметрическое уравнение окружности. Теорема доказана.

Замечание. Из формулы (3) следует, что при вращениях в противоположные стороны траектория суммарного движения превращается в окружность при выполнении условия $(\rho_1 + \rho_2)^2 = (\rho_1 - \rho_2)^2$, что возможно лишь в случаях $\rho_1=0$ или $\rho_2=0$.

Вращения в одну сторону

Теорема 5. При вращениях в одну сторону траектория суммарного движения представляет собой окружность.

Доказательство.

В координатной системе xOy начало O' координатной системы $x'O'y'$ описывается формулами (1).

В координатной системе $x'O'y'$ объект a определяется следующим образом:

$$x_2 = \rho_2 \cos(\omega t + \varphi_2), \quad y_2 = \rho_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

В координатной системе xOy объект a , соответственно, определяется:

$$x_a = x_1 + x_2 = \rho_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + \rho_2 \cos(\omega t + \varphi_2),$$

$$y_a = y_1 + y_2 = \rho_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \rho_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Для радиус-вектора \mathbf{A} справедливо преобразование

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= x_A^2 + y_A^2 = \rho_1^2 \cos^2(\omega t + \varphi_1) + \rho_2^2 \cos^2(\omega t + \varphi_2) + \\ &+ 2\rho_1\rho_2 \cos(\omega t + \varphi_1) \cos(\omega t + \varphi_2) + \\ &+ \rho_1^2 \sin^2(\omega t + \varphi_1) + \rho_2^2 \sin^2(\omega t + \varphi_2) + \\ &+ 2\rho_1\rho_2 \sin(\omega t + \varphi_1) \sin(\omega t + \varphi_2) = \\ &\dots \\ &= \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned}$$

Величина радиус-вектора \mathbf{A} не меняется. Это возможно лишь в том случае, если траектория суммарного движения является окружностью.

Теорема доказана.

Следствие 5-1. Объект a вращается в координатной системе xOy без углового ускорения со скоростью ω .

Следствие 5-2. Радиус вращения равен

$$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Нетрудно доказать теорему, обратную пятой.

Теорема 6. Если траектория суммарного движения является круговой, то объект a совершает круговое движение в координатной системе $x'O'y'$ без углового ускорения со скоростью $+\omega$.

Доказательство.

Пусть $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

В координатной системе xOy начало O' координатной системы $x'O'y'$ описывается формулами (1). При этом объект a в системе xOy определяется в соответствии с параметрическими формулами:

$$x = (\rho_1 + \rho_2) \cos \omega t, \quad y = (\rho_1 + \rho_2) \sin \omega t.$$

Поскольку $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, то в координатной системе $x'O'y'$ объект a определяется следующим образом:

$$x_2 = x - x_1 = (\rho_1 + \rho_2) \cos \omega t - \rho_1 \cos \omega t = \rho_2 \cos \omega t,$$

$$y_2 = y - y_1 = (\rho_1 + \rho_2) \sin \omega t - \rho_1 \sin \omega t = \rho_2 \sin \omega t.$$

Это параметрическое уравнение окружности.

Теорема доказана.

Теорема 7. Если скорость вращения объекта a в координатной системе $x'O'y'$ равна нулю, то траектория суммарного движения является окружностью с центром в точке с координатами $x_a = \rho_2 \cos \varphi_2$, $y_a = \rho_2 \sin \varphi_2$ и с радиусом ρ_1 .

Доказательство.

В координатной системе xOy начало O' координатной системы $x'O'y'$ описывается формулами (1).

В координатной системе $x'O'y'$ объект a определяется следующим образом:

$$x_2 = \rho_2 \cos \varphi_2, \quad y_2 = \rho_2 \sin \varphi_2.$$

В координатной системе xOy объект a , соответственно, определяется:

$$x_a = x_1 + x_2 = \rho_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + \rho_2 \cos \varphi_2,$$

$$y_a = y_1 + y_2 = \rho_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \rho_2 \sin \varphi_2,$$

$$x_a - \rho_2 \cos \varphi_2 = \rho_1 \cos(\omega t + \varphi_1),$$

$$y_a - \rho_2 \sin \varphi_2 = \rho_1 \sin(\omega t + \varphi_1),$$

$$(x_a - \rho_2 \cos \varphi_2)^2 + (y_a - \rho_2 \sin \varphi_2)^2 = \rho_1^2.$$

Теорема доказана.

Круговые движения с кратными скоростями

Объект a вращается в координатной системе $x'O'y'$ без углового ускорения со скоростью $+2\omega$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

В координатной системе xOy начало O' координатной системы $x'O'y'$ определяется следующим образом:

$$x_1 = \rho_1 \cos \omega t, \quad y_1 = \rho_1 \sin \omega t.$$

В координатной системе $x'O'y'$ объект a , соответственно, определяется:

$$x_2 = \rho_2 \cos 2\omega t, \quad y_2 = \rho_2 \sin 2\omega t.$$

В координатной системе xOy объект a определяется следующим образом:

$$x_a = \rho_1 \cos \omega t + \rho_2 \cos 2\omega t,$$

$$y_a = \rho_1 \sin \omega t + \rho_2 \sin 2\omega t.$$

На рис. 3 показана траектория объекта a ($\rho_1 = \rho_2$).

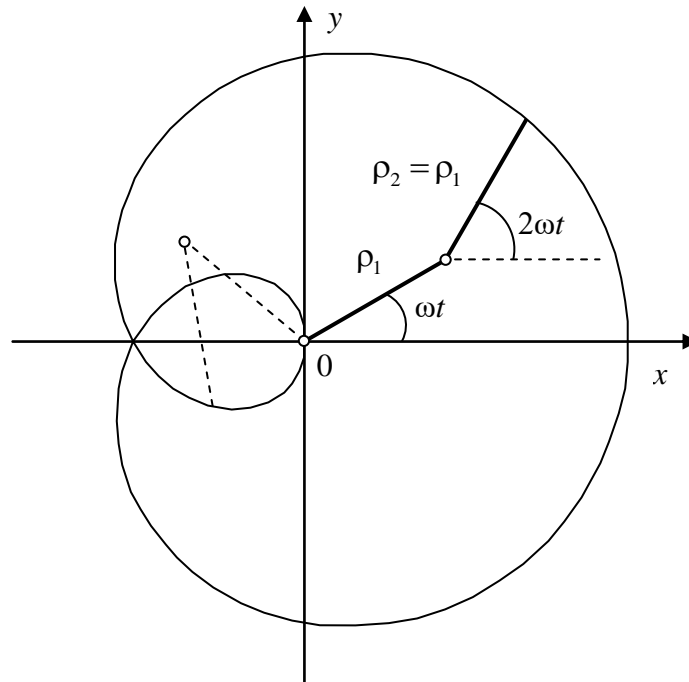


Рис. 3. Траектория типа улитки
Fig. 3. Snail-type trajectory

В полярных координатах эта траектория представляема в виде

$$\rho = \rho_1 \sqrt{2 + 2 \cos \frac{2}{3} \varphi} .$$

Петля в траектории появляется при выполнении соотношений

$$\rho_1 \sin \omega t < \rho_2 \sin 2\omega t ,$$

$$\rho_1 \sin \omega t < \rho_2 2 \sin \omega t \cos \omega t ,$$

$$\rho_1 < 2\rho_2 \cos \omega t .$$

Если $\rho_1 \geq 2\rho_2$, петля не образуется. Такая траектория показана на рис. 4.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Полученные уравнения эллипса (2) и (3) выражаются через радиусы вращения ρ_1 и ρ_2 , а не через полуоси, как в традиционном описании, что составляет предмет научной новизны, в том числе в области аналитической геометрии.

Все стандартные характеристики эллипса, такие как эксцентриситет, фокусы, корни характеристического уравнения, выражаются через радиусы вращения ρ_1 и ρ_2 , что тоже составляет предмет научной новизны.

Классическое общеизвестное «механическое» свойство эллипса связано с механическим способом его по-

строения, заключающимся в том, что нерастяжимую нить длиной, равной большой оси эллипса, закрепляют в его фокусах и натягивают на карандаш. При перемещении карандаша по скользящей натянутой нити его след изображает эллипс. Очевидным недостатком этого способа является малая вероятность применения его на практике, бесперспективность создания его инженерных аналогов и их использования в технике и технологиях.

Изображенный на рис. 2 способ построения эллипса посредством двух противоположно вращающихся радиусов ρ_1 и ρ_2 , напротив, уже имеет самые разнообразные инженерные аналоги, широко используемые в технике, например в планетарных редукторах, подшипниках качения и т. д.

Механическое построение эллипса в соответствии с рис. 2 предполагает, что первый радиус ρ_1 больше второго радиуса ρ_2 . Вместе с тем формула (3) допускает, что если $\rho_1 < \rho_2$, то результирующей траекторией по-прежнему будет эллипс.

Подобно тому как результатом сложения двух равномерных прямолинейных движений является также равномерное прямолинейное движение, результатом сложения двух равномерных однонаправленных круговых движений является равномерное круговое движение. В этом проявляется обобщение принципа относительности Галилея при прямолинейном движении на вращательное движение. Такие движения не менее широко распространены в технике, как в случае разнонаправленных вращений.

Особенностью комбинации кратных вращений является экзотическая форма траекторий.

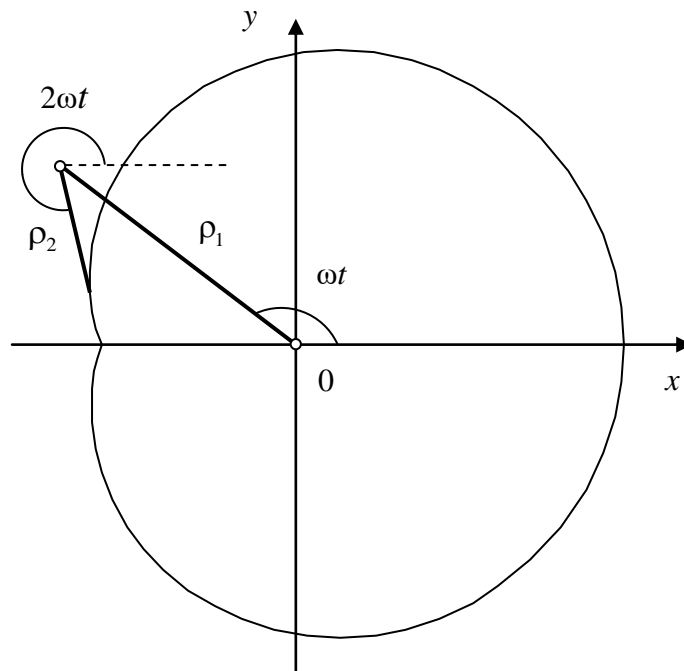


Рис. 4. Улитка без петли
Fig. 4. A snail without a loop

Дальнейшие исследования в этом направлении могут касаться комбинации некротных вращений, а также комбинации вращений со сложными движениями.

Практический аспект исследования определяется тем, что полученные формулы могут непосредственно использоваться в САПР при выполнении конструкторских работ.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

При вращениях в противоположные стороны траектория суммарного движения представляет собой эллипс.

При вращениях в одну сторону траектория суммарного движения представляет собой окружность.

При круговых движениях с кратными скоростями траектории суммарного движения представляют собой эллипсы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Бардин Б.С., Панев А.С. О поступательном прямолинейном движении твердого тела, несущего подвижную внутреннюю массу // Современная математика. Фундаментальные направления. 2019. Т. 65. № 4. С. 557–592. DOI: [10.22363/2413-3639-2019-65-4-557-592](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2019-65-4-557-592).
- Абрамов М.П., Шипитько О.С., Григорьев А.С., Ершов Е.И. Поиск точки схода для динамической калибровки внешних параметров монокулярной камеры при условии прямолинейного движения // Сенсорные системы. 2020. Т. 34. № 1. С. 32–43. DOI: [10.31857/S0235009220010023](https://doi.org/10.31857/S0235009220010023).
- Кондаков С.В., Дьяконов А.А., Павловская О.О., Подживотова И.А. Алгоритм работы следящей системы управления для стабилизации прямолинейного движения промышленного трактора с дифференциальным механизмом поворота // Вестник Брянского государственного технического университета. 2019. № 12. С. 68–75. DOI: [10.30987/1999-8775-2019-2019-12-68-75](https://doi.org/10.30987/1999-8775-2019-2019-12-68-75).
- Ушакова О.В. Алгоритм коррекции сетки к области, образованной поверхностями вращения с параллельными осями вращения // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. 2018. № 1. С. 30–41.
- Исмагилов Ф.Р., Тергулов Т.Р., Шапиро С.В. Каскадный синхронно-асинхронный генератор со встречным вращением статора // Электротехника. 2017. № 1. С. 12–16.
- Подболотов С.В., Кольга А.Д. Математическое и экспериментальное моделирование режимов работы центробежной турбомшины коаксиальным расположением рабочих колес // Известия Уральского государственного горного университета. 2018. № 1. С. 80–84. DOI: [10.21440/2307-2091-2018-1-80-84](https://doi.org/10.21440/2307-2091-2018-1-80-84).
- Романова Е.Б., Кузнецов Р.В. Интеграция САПР электроники “ALTIUM DESIGNER” и машиностроительной САПР “AUTODESK INVENTOR” // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2017. Т. 60. № 1. С. 63–67. DOI: [10.17586/0021-3454-2017-60-1-63-67](https://doi.org/10.17586/0021-3454-2017-60-1-63-67).
- Кузнецов С.А. Разработка отечественных специализированных САПР – неизбежный путь к обеспечению технологической независимости России от зарубежных САПР // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2017. № 5. С. 1–11.
- Бибило П.Н., Романов В.И. Интеграция САПР для синтеза логических схем с использованием глобальной оптимизации // Программные продукты и системы. 2019. № 1. С. 26–33. DOI: [10.15827/0236-235X.125.026-033](https://doi.org/10.15827/0236-235X.125.026-033).
- Болотник Н.Н., Губко П.А., Фигурин Т.Ю. О возможности безреверсного периодического прямолинейного движения системы двух тел на шероховатой плоскости // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82. № 2. С. 138–148.
- Поляк Г.Л. Определение маневра цели по угломерной информации в 2D задаче слежения при движении наблюдателя прямолинейным курсом // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2019. № 2. С. 125–131.
- Кирсанов А.П. Скрытое движение воздушных объектов в зоне обнаружения бортовой доплеровской радиолокационной станции по прямолинейным траекториям // Вестник Московского авиационного института. 2019. Т. 26. № 4. С. 191–199. DOI: [10.34759/vst-2019-4-191-199](https://doi.org/10.34759/vst-2019-4-191-199).
- Смирнов К.А., Курочкин С.Ю. Моделирование прямолинейного движения колёсного робота с электро-механической трансмиссией // Робототехника и техническая кибернетика. 2019. Т. 7. № 1. С. 46–52. DOI: [10.31776/RTSJ.7106](https://doi.org/10.31776/RTSJ.7106).
- Юдин Ю.И. Способ идентификации математической модели прямолинейного движения судна // Морские интеллектуальные технологии. 2019. № 4-3. С. 11–17.
- Попов И.П. Моделирование триинертного осциллятора // Прикладная математика и вопросы управления. 2018. № 4. С. 73–79.
- Popov I.P. Theory of a Multi-Inert Oscillator // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2020. Vol. 49. № 8. P. 667–671. DOI: [10.3103/S1052618820080105](https://doi.org/10.3103/S1052618820080105).
- Попов И.П. Реактивная и полная механические мощности вибрационных машин // Вестник Магнитогорского государственного технического университета им. Г.И. Носова. 2019. Т. 17. № 2. С. 55–59. DOI: [10.18503/1995-2732-2019-17-2-55-59](https://doi.org/10.18503/1995-2732-2019-17-2-55-59).
- Митин С.Г., Бочкарёв П.Ю., Шалунов В.В., Разманов И.А. Определение рациональных уровней отсева вариантов проектных решений в системе автоматизированного планирования технологических процессов // Вектор науки Тольяттинского государственного университета. 2021. № 3. С. 48–56. DOI: [10.18323/2073-5073-2021-3-48-56](https://doi.org/10.18323/2073-5073-2021-3-48-56).
- Гордеев А.В., Логинов Н.Ю. Оптимизация технических параметров при решении инженерных задач // Вектор науки Тольяттинского государственного университета. 2015. № 4. С. 25–30. DOI: [10.18323/2073-5073-2015-4-25-30](https://doi.org/10.18323/2073-5073-2015-4-25-30).
- Зибров П.Ф. Проблема математического моделирования точности в технологии машиностроения // Вектор науки Тольяттинского государственного университета. 2012. № 1. С. 57–61.

REFERENCES

- Bardin B.S., Panev A.S. Translational rectilinear motion of a solid body carrying a movable inner mass. *Sovremennaya matematika. Fundamentalnye napravleniya*, 2019, vol. 65, no. 4, pp. 557–592. DOI: [10.22363/2413-3639-2019-65-4-557-592](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2019-65-4-557-592).
- Abramov M.P., Shipitko O.S., Grigorev A.S., Ershov E.I. Vanishing point detection for monocular camera extrinsic calibration under translation movement. *Sensornye sistemy*, 2020, vol. 34, no. 1, pp. 32–43. DOI: [10.31857/S0235009220010023](https://doi.org/10.31857/S0235009220010023).
- Kondakov S.V., Dyakonov A.A., Pavlovskaya O.O., Podzhivotova I.A. Algorithm of follow-up control system work for rectilinear motion stabilization of industrial tractor with differential rotation gear. *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2019, no. 12, pp. 68–75. DOI: [10.30987/1999-8775-2019-2019-12-68-75](https://doi.org/10.30987/1999-8775-2019-2019-12-68-75).
- Ushakova O.V. Algorithm of regridding to the area formed by the rotational surfaces with the parallel axes of rotation. *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov*, 2018, no. 1, pp. 30–41.
- Ismagilov F.R., Teregulov T.R., Shapiro S.V. Cascaded synchronous-asynchronous generator with stator counterrotation. *Elektrotehnika*, 2017, no. 1, pp. 12–16.
- Podbolotov S.V., Kolga A.D. Mathematical and experimental modeling of centrifugal turbomachines' operating modes with a coaxial arrangement of impellers. *Izvestiya Uralskogo gosudarstvennogo gornogo universiteta*, 2018, no. 1, pp. 80–84. DOI: [10.21440/2307-2091-2018-1-80-84](https://doi.org/10.21440/2307-2091-2018-1-80-84).
- Romanova E.B., Kuznetsov R.V. Integration of CAD Altium designer for electronics and MCAD AUTODESK inventor. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Priborostroenie*, 2017, vol. 60, no. 1, pp. 63–67. DOI: [10.17586/0021-3454-2017-60-1-63-67](https://doi.org/10.17586/0021-3454-2017-60-1-63-67).
- Kuznetsov S.A. Development of domestic specialized CAD - the inevitable way to ensure Russia's technological independence from foreign CAD. *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol, diagnostika*, 2017, no. 5, pp. 1–11.
- Bibilo P.N., Romanov V.I. CAD integration for logic synthesis using global optimization. *Programmnye produkty i sistemy*, 2019, no. 1, pp. 26–33. DOI: [10.15827/0236-235X.125.026-033](https://doi.org/10.15827/0236-235X.125.026-033).
- Bolotnik N.N., Gubko P.A., Figurina T.Y. Possibility of a non-reverse periodic rectilinear motion of a two-body system on a rough plane. *Mechanics of Solids*, 2018, vol. 53, no. 2, pp. 7–15.
- Polyak G.L. Determination of target maneuver by angular information in 2D tracking problem when the observer moves in a straight course. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika*, 2019, no. 2, pp. 125–131.
- Kirsanov A.P. Stealthy movement of aerial object along rectilinear paths in the onboard doppler radar station detection zone. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta*, 2019, vol. 26, no. 4, pp. 191–199. DOI: [10.34759/vst-2019-4-191-199](https://doi.org/10.34759/vst-2019-4-191-199).
- Smirnov K.A., Kurochkin S.Yu. Simulation of rectilinear motion of wheeled robot with electromechanical powertrain. *Robototekhnika i tekhnicheskaya kibernetika*, 2019, vol. 7, no. 1, pp. 46–52. DOI: [10.31776/RTCI.7106](https://doi.org/10.31776/RTCI.7106).
- Yudin Yu.I. Method for identifying mathematical model of the rectilinear motion of the vessel. *Morskije intellektualnye tekhnologii*, 2019, no. 4-3, pp. 11–17.
- Popov I.P. Modeling three-inert oscillator. *Prikladnaya matematika i voprosy upravleniya*, 2018, no. 4, pp. 73–79.
- Popov I.P. Theory of a Multi-Inert Oscillator. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2020, vol. 49, no. 8, pp. 667–671. DOI: [10.3103/S1052618820080105](https://doi.org/10.3103/S1052618820080105).
- Popov I.P. Reactive and full mechanical power of vibration machines. *Vestnik Magnitogorskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. G.I. Nosova*, 2019, vol. 17, no. 2, pp. 55–59. DOI: [10.18503/1995-2732-2019-17-2-55-59](https://doi.org/10.18503/1995-2732-2019-17-2-55-59).
- Mitin S.G., Bochkarev P.Yu., Shalunov V.V., Razmanov I.A. Determination of sustainable levels of design alternatives selection in the workflow CAP system. *Vektor nauki Tolyattinskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2021, no. 3, pp. 48–56. DOI: [10.18323/2073-5073-2021-3-48-56](https://doi.org/10.18323/2073-5073-2021-3-48-56).
- Gordeev A.V., Loginov N.Yu. Technical parameters optimization while solving engineering problems. *Vektor nauki Tolyattinskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2015, no. 4, pp. 25–30. DOI: [10.18323/2073-5073-2015-4-25-30](https://doi.org/10.18323/2073-5073-2015-4-25-30).
- Zibrov P.F. Problem of mathematical modelling of accuracy in technology of mechanical engineering. *Vektor nauki Tolyattinskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2012, no. 1, pp. 57–61.

Combination of circular motions in machines and mechanisms

© 2021

Igor P. Popov, PhD (Engineering), senior lecturer

Kurgan State University, Kurgan (Russia)

E-mail: ip.popow@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8683-0387>

Abstract: In technical systems, including aviation and space technology, and in particular, in aircraft transmissions, bearings, orbital systems, helicopter mechanisms, and many others, the combined rotational movements are widespread, and when designing, it is important to understand the nature of joint motion. The paper aimed at the generalization of the principle of the combination of motions in circular movements. The author considered the $x'O'y'$ coordinate system that rotates in the xOy coordinate system without angular acceleration with the velocity ω . The radius of rotation is equal to ρ_1 . Wherein $Ox \parallel O'x'$, $Oy \parallel O'y'$. An object a rotates in the $x'O'y'$ coordinate system without angular acceleration with the velocity

ty $\pm\omega$. The radius of rotation is equal to ρ_2 . The study identified that at reverse rotations, the trajectory of joint motion represents an ellipse. The author determined all standard ellipse characteristics relating to the case under the study and identified the elliptical trajectory inclination. The study shows that if the joint motion trajectory is elliptical and the semi-axes are equal $(\rho_1+\rho_2)$ and $|\rho_1-\rho_2|$, then an object a undergoes circular motion in the $x'O'y'$ coordinate system without angular acceleration with the velocity $-\omega$. Just as the result of the superposition of two non-accelerated straight movements is also non-accelerated, i.e. a uniform and rectilinear movement, at the one-way rotations, the joint motion trajectory represents a circle. At circular motions with multiple speeds, the joint motion trajectory represents a snail. The practical aspect of the study is determined by the fact that the resulting formulas can be directly used in the CAD system when performing design works.

Keywords: combination of motions; circular motions; elliptical trajectory; circular trajectory; multiple speeds.

For citation: Popov I.P. Combination of circular motions in machines and mechanisms. *Frontier Materials & Technologies*, 2021, no. 4, pp. 48–56. DOI: 10.18323/2782-4039-2021-4-48-56.